1. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE" IM SOMMERSEMESTER 2000

Aufgabe 1. Es sei $X := [0,1)$ und

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \min\{|x-y|, x+|1-y|, |x-1|+y\} \end{aligned}$$

(i) Zeige, dass d eine Metrik auf X ist.
(ii) Zeige, dass X versehen mit der Metrik d homöomorph zu S^1 ist.

Tipp (zu (ii)). Vielleicht bringt Beispiel 1.7 eine Idee, und vielleicht hilft Beispiel 1.10 dann weiter. Aber wahrscheinlich überlegt man zunächst besser selbst.

Aufgabe 2. Es sei $e_{n+1} = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \approx S^n \setminus \{e_{n+1}\}$.

Tipp. Stereographische Projektion.

Aufgabe 3. Es seien X und Y die durch

$$X = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3 \colon x_1^2 + x_2^2 \geq x_3^2 + x_4^2\}$$
$$Y = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3 \colon x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 + x_4^2\}$$

gegebenen Teilmengen von $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Offenbar ist $S^3 = X \cup Y$.

(i) Zeige, dass
$$X \cap Y \approx S^1 \times S^1, \qquad X \approx S^1 \times D^2, \qquad Y \approx D^2 \times S^1.$$
(ii) Male und beschrifte ein Bild der Situation in „halber" Dimension, das heißt, ersetze $\mathbb{R}^4$, S^3, S^1, D^2 durch $\mathbb{R}^2$, S^1, S^0, D^1.

Tipp. Es kann nicht schaden, zuerst den zweiten Teil zu machen. Von den drei Homöomorphismen ist $X \cap Y \approx S^1 \times S^1$ am leichtesten zu beschreiben.

Abgabe: am 28. April in der Vorlesung, wenn wir nicht noch etwas anderes vereinbaren.