10. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Aufgabe 32. Sei X ein kompakter Raum. Zeige, dass der Raum X genau dann metrisierbar ist, wenn er das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Aufgabe 33. Sei X ein lokal kompakter, nicht kompakter Raum, $e\colon X \to K$ eine Kompaktifizierung von X und $i\colon X \to X^+$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Zeige, dass eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $f\colon K \to X^+$ existiert, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "i"'] & K \arrow[d, dotted, "!\ f"] \\ & X^+ \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Tipp. Unter anderem wird zu zeigen sein, dass $e[X]$ offen in K ist. Für eine beliebige Kompaktifizierung eines *beliebigen* Raumes X braucht das nicht zu gelten, wie man an dem Beispiel $\mathbb{Q} \cap I \subset I$ sieht. Hier wird also die lokale Kompaktheit zu benutzen sein.

Definition. Seien X, Y Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann heißt f *eigentlich*, wenn $f^{-1}[K]$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ kompakt ist.

Aufgabe 34. Seien X, Y Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist eigentlich.

(ii) Die Funktion

$$f^+\colon X^+ \to Y^+$$
$$x \mapsto \begin{cases} \infty, & x = \infty, \\ f(x), & x \neq \infty, \end{cases}$$

ist stetig.

Aufgabe 35. Es sei $\Phi\colon \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Folge $(\Phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\beta\mathbb{N}$ (also, kürzer gesagt, die Folge Φ) einen Häufungspunkt aber keine konvergente Teilfolge besitzt.

Abgabe: am 30. Juni 2000 in der Vorlesung.