12. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Aufgabe 39. Zeige für $n \in \mathbb{N}$, dass die Abbildung $S^n \to \mathbb{R}P^n$, die sich aus der Definition des projektiven Raumes ergibt, eine Überlagerung ist.

Aufgabe 40. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_0 \in \mathbb{R}P^n$. Zeige, dass es ein Element $\alpha \in \pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0)$ mit $\alpha \neq 1$ und $\alpha^2 = 1$ gibt.

Tipp. Betrachte die Überlagerung aus der vorherigen Aufgabe. Eine spannende Schleife in $\mathbb{R}P^n$ wird eine solche sein, die sich zu einem nicht geschlossenen Weg hochheben lässt. Gib eine einfache solche konkret an, und untersuche sie.

Aufgabe 41. Sei $f\colon S^1 \to S^1$ stetig und $\deg f \neq 0$. Zeige, dass f surjektiv ist.

Aufgabe 42. Seien $f, g\colon S^1 \to S^1$ stetig. Zeige:

(i) Ist $\deg f = \deg g$, so ist $f \simeq g$.

(ii) $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.

Tipp. Der Spezialfall $\deg f = \deg g = 0$ von (i) wurde in Aufgabe 37, (i) $\Rightarrow$ (iv) bereits gezeigt. (Warum?)

Bei (ii) kann man sich wegen (i) auf spezielle Abbildungen beschränken.

Abgabe: am 14. Juli 2000 in der Vorlesung.