3. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Aufgabe 8. Zeige:

(i) Die Intervalle $\{(a,b)\colon a,b\in\mathbb{R}\}$ bilden eine Basis der (üblichen) Topologie von $\mathbb{R}$.

(ii) Ebenso ist $\{(a,b)\colon a,b\in\mathbb{Q}\}$ eine Basis der (üblichen) Topologie von $\mathbb{R}$.

(iii) Sind X, Y topologische Räume und ist $\mathcal{B}_X$ eine Basis der Topologie von X, $\mathcal{B}_Y$ eine Basis der Topologie von Y, so ist

$$\{U\times V\colon U\in\mathcal{B}_X, V\in\mathcal{B}_Y\}$$

eine Basis der Produkttopologie auf $X\times Y$.

Aufgabe 9. Es seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume und

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}\colon (X\times Y)\times(X\times Y)&\to\mathbb{R}\\ ((x,y),(x',y'))&\mapsto d_X(x,x')+d_Y(y,y'). \end{aligned}$$

Zeige

(i) $(X\times Y, d_{X\times Y})$ ist ein metrischer Raum.

(ii) Die von $d_{X\times Y}$ auf $X\times Y$ induzierte Topologie ist die Produkttopologie zu den von d_X und d_Y auf X beziehungsweise Y induzierten Topologien.

Aufgabe 10. Es seien X, Y Räume und $A\subset X$, $B\subset Y$. Zeige, dass die Topologien, die $A\times B$ als Produkt von Unterräumen und als Unterraum des Produkts $X\times Y$ erhält, übereinstimmen.

Aufgabe 11. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) X ist hausdorffsch.

(ii) Für jeden Raum Z und jede dichte Teilmenge $D\subset Z$ gilt, dass aus $f_1|_D=f_2|_D$ für stetige Funktionen $f_1,f_2\colon Z\to X$ folgt, dass $f_1=f_2$.

Abgabe: am 12. Mai 2000 in der Vorlesung.