4. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Definition. Sei X ein Raum, M eine Menge und $f\colon X \to M$ eine Funktion. f heißt *lokal konstant*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f|_U$ konstant ist.

Aufgabe 12. Es sei X ein Raum. Zeige:

(i) Ist M eine Menge, $y \in M$ und $f\colon X \to M$ lokal konstant, so ist $\{x \in X\colon f(x) = y\}$ offen-abgeschlossen.

(ii) Ist X zusammenhängend, M eine Menge und $f\colon X \to M$ lokal konstant, so ist f konstant.

Aufgabe 13. Betrachte den Unterraum

$$X := \left(\left\{ \frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \times I \right) \cup \{(0,0),(0,1)\}$$

von $\mathbb{R}^2$.

(i) Bestimme die Zusammenhangskomponenten von X.

(ii) Zeige, dass für jede lokal konstante Funktion $f\colon X \to M$ in eine beliebige Menge $f(0,0) = f(0,1)$ gilt.

Bemerkung. Das Interessante an (ii) ist, dass Du zuvor hoffentlich gezeigt hast, dass diese beiden Punkte nicht in der selben Komponente liegen.

Aufgabe 14. Seien X, Y quasikompakte topologische Räume. Zeige, dass $X \times Y$ quasikompakt ist.

Anleitung. Nimm eine beliebige offene Überdeckung von $X \times Y$. Für beliebiges $x \in X$ zeige, dass es eine endliche Teilüberdeckung von $\{x\} \times Y$ gibt. Wende dann Proposition 4.11 an und schließlich noch die Quasikompaktheit von X.

Abgabe: am 19. Mai 2000 in der Vorlesung.