6. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Aufgabe 18. Es sei $p_n\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Surjektion, die sich aus der Definition von $\mathbb{R}P^n$ ergibt. Zeige, dass $\mathbb{R}P^0$ ein einpunktiger Raum ist, und dass $\mathbb{R}P^{n+1} \approx \mathbb{R}P^n \cup_{p_n} D^{n+1}$.

Aufgabe 19. Wir betrachten $S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2$ und die Abbildungen

$$\begin{aligned} i\colon S^1 \times S^1 &\to S^1 \times D^2 & \qquad t\colon S^1 \times S^1 &\to S^1 \times D^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y), & (x, y) &\mapsto (y, x). \end{aligned}$$

Zeige:

(i) $S^1 \times D^2 \cup_i S^1 \times D^2 \approx S^1 \times S^2$,
(ii) $S^1 \times D^2 \cup_t S^1 \times D^2 \approx S^3$.

Tipp (zu (ii)). Aufgabe 3.

Aufgabe 20. Es sei $\mathrm{C}\,\mathbb{N}$ der Kegel über $\mathbb{N}$ und

$$X := \{((1 - \lambda)n, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeige:

(i) Es gibt eine stetige Bijektion $\mathrm{C}\,\mathbb{N} \to X$.
(ii) $\mathrm{C}\,\mathbb{N}$ ist nicht homöomorph zu X.

Tipp (zu (ii)). Abzählbarkeitsaxiome.

Definition. Ein Raum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Aufgabe 21. Es sei I^I der Raum aller Funktionen von I nach I versehen mit der Produkttopologie. Zeige, dass I^I separabel ist.

Tipp. Betrachte zum Beispiel eine geeignete Teilmenge der Treppenfunktionen.

Abgabe: am 2. Juni 2000 in der Vorlesung.