7. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Aufgabe 22. Zeige, dass der Raum $[0, \omega_1]$ kompakt ist.

Tipp. Betrachte die Menge aller $x \in [0, \omega_1]$, so dass $[0, x]$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 23. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Setze

$$D := \{J \subset \mathbb{N}\colon J \text{ endlich}\},$$

ordne D durch Inklusion und setze $s_J := \sum_{j\in J} a_j$ für $J \in D$.

(i) Zeige, dass $(s_J)_{J\in D}$ ein Netz in $\mathbb{R}$ ist.
(ii) Beschreibe mit Begriffen aus Analysis I, wann das Netz $(s_J)_{J\in D}$ konvergent ist und wogegen es dann konvergiert.

Aufgabe 24. Beweise Proposition 8.16 aus dem Skript, zeige also: Sind X, Y Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ eine Funktion, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig in x.
(ii) Für jedes Netz $(a_k)_{k\in D}$ in X, das gegen x konvergiert, konvergiert das Netz $(f(a_k))_{k\in D}$ gegen $f(x)$.

Definition. Es seien X, Y Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. f heißt *folgenstetig*, wenn für jedes $x \in X$ und jede gegen x konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Aufgabe 25. Zeige:

(i) Jede stetige Funktion ist folgenstetig.
(ii) Sind X, Y Räume, erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom und ist $f\colon X \to Y$ folgenstetig, so ist f stetig.
(iii) Es gibt Räume X, Y und eine folgenstetige Funktion $f\colon X \to Y$, die nicht stetig ist.

Abgabe: am 9. Juni 2000 in der Vorlesung.