8. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Aufgabe 26. Es seien M, M', M'' Mengen, $f\colon M \to M'$, $g\colon M' \to M''$ Funktionen und $\mathcal{F}$ ein Filter auf M. Zeige, dass $(g \circ f)_*(\mathcal{F}) = g_*(f_*(\mathcal{F}))$.

Aufgabe 27. Für eine gerichtete Menge $(D, \geq)$, setzen wir

$$\mathcal{B}_D := \{\{x\colon x \geq k\} : k \in D\}\,.$$

(i) Zeige, dass $\mathcal{B}_D$ eine Filterbasis auf D ist.

Nenne den von $\mathcal{B}_D$ erzeugten Filter $\mathcal{F}_D$. Sei nun X ein Raum, $x \in X$ und $a\colon D \to X$ ein Netz in X. Zeige:

(ii) Das Netz a konvergiert genau dann gegen x, wenn der Filter $a_*(\mathcal{F}_D)$ gegen x konvergiert.

(iii) x ist genau dann Häufungspunkt des Netzes a, wenn x Häufungspunkt des Filters $a_*(\mathcal{F}_D)$ ist.

Aufgabe 28. Sei X ein Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Zeige: Ist $x \in X$ und $\mathcal{S}$ eine Subbasis von X, so konvergiert $\mathcal{F}$ genau dann gegen x, wenn $S \in \mathcal{F}$ für alle $S \in \mathcal{S}$ mit $x \in S$.

Die nächste Aufgabe hat eigentlich nichts mit Topologie zu tun, lässt sich aber auf sehr nette Art mit Hilfe des Satzes von Tychonoff (Satz 9.26) lösen.

Zusatzaufgabe 1. Es sei $G = (E, K)$ ein unendlicher Graph mit Eckenmenge E und Kantenmenge $K \subset E \times E$, F eine endliche Menge, deren Elemente wir Farben nennen. Eine (Ecken-)Färbung von G (mit Farben aus F) sei eine Funktion von E nach F. Eine Färbung f heiße zulässig, wenn keine zwei benachbarten Ecken gleich gefärbt sind, wenn also $f(e_0) \neq f(e_1)$ für alle $(e_0, e_1) \in K$. Zeige, dass, wenn jeder endliche Teilgraph von G eine zulässige Färbung besitzt, auch G selbst eine zulässige Färbung besitzt.

Anleitung. Wähle auf der Menge der Färbungen mit Hilfe des Satzes von Tychonoff eine kompakte Topologie, so dass zu jeder Kante die Menge der Färbungen, die an ihr nichts Verbotenes tun, abgeschlossen ist. Benutze dann Lemma 9.19.

Abgabe: am 16. Juni 2000 in der Vorlesung.