ZUSATZÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE“ IM SOMMERSEMESTER 2000

Hier ist auf vielfachen (nicht wirklich) Wunsch noch ein Zusatzübungszettel für die, die noch etwas lernen wollen oder ansonsten lange Weile bekommen. Wer Lösungen hat, kann sich gerne mit mir über sie unterhalten. Mündliche Beweisskizzen oder auch nur Nachfragen sind auch willkommen.

Wir beginnen mit einigen Dingen, die auch noch gut in die Vorlesung gepasst hätten, wenn nur noch eine (?) Sitzung mehr gewesen wäre.

Definition. Sind (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume, so nennen wir den punktierten Raum $(X, x_0) \vee (Y, y_0) := ((X+Y)/\{x_0, y_0\}, [\{x_0, y_0\}])$ die *Ein-Punkt-Vereinigung* dieser Räume. Dabei hätte an Stelle von x_0 beziehungsweise y_0 eigentlich $i_0(x_0)$, $i_1(y_1)$ stehen sollen, wobei i_j die kanonischen Inklusionen in die topologische Summe bezeichnen. Den Raum $(X+Y)/\{x_0, y_0\}$ bezeichnen wir auch mit $X \vee Y$, obwohl in der Notation der Basispunkt fehlt.

Wir werden wie bisher schon die Kreislinie S^1 immer mit Basispunkt $1 = (1, 0)$ betrachten und dies nun in der Notation öfter unterdrücken. Wir betrachten den Raum $S^1 \vee S^1$, der wie die Zahl Acht aussieht.

Zusatzaufgabe 3. Es seien $i^0, i^1 : S^1 \to S^1 \vee S^1$ die Inklusionen, $e \in \pi_1(S^1)$ ein Erzeuger und $\alpha_0, \alpha_1 \in \pi_1(S^1 \vee S^1)$ die durch $\alpha_j := i^j_{\#}(e)$ gegebenen Elemente. Zeige:

(i) Ist G eine beliebige Gruppe und sind $\beta_0, \beta_1 \in G$, so existiert genau ein Homomorphismus $f : \pi_1(S^1 \vee S^1) \to G$ mit $f(\alpha_j) = \beta_j$, $j \in \{0, 1\}$.

(ii) $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ ist nicht abelsch, genauer: $\alpha_0\alpha_1 \neq \alpha_1\alpha_0$.

Tipp. (i) folgt aus dem Satz von Seifert und van Kampen. Um (ii) zu zeigen, benutze (i) und die Existenz einer nicht abelschen Gruppe.

Bemerkung. (i) formuliert man so: $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ ist frei über den Erzeugern α_0 und α_1. Dass diese beiden Elemente tatsächlich gemeinsam die Gruppe erzeugen, wissen wir aus dem *Beweis* des Satzes von Seifert und van Kampen. Aus der Freiheit folgt nun auch, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j_i \in \{0, 1\}$, $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $j_{i+1} \neq j_i$ gilt, dass $\alpha_{j_0}^{m_0}\alpha_{j_1}^{m_1} \cdots \alpha_{j_{n-1}}^{m_{n-1}} \neq 1$. Das könnte man auch aus dem Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen herauskitzeln oder ähnlich wie (ii) zeigen. Wer mehr darüber wissen möchte, der schlage in einem Buch unter dem Stichwort *freie Gruppen* nach.

Abgabe: gar nicht.

Zusatzaufgabe 4. Betrachte die Beschreibung des Torus T^2 als $I \times I/\sim$, wobei $\sim$ durch $(x,0) \sim (x,1)$ und $(0,y) \sim (1,y)$ für alle $x, y \in I$ erzeugt werde. Zeige daraus, indem Du schaust, was bei dieser Identifikation auf $\mathfrak{d}(I \times I) = (I \times \{0,1\}) \cup (\{0,1\} \times I)$ passiert, dass man den Torus durch Anheften einer 2-Zelle an $S^1 \vee S^1$ gewinnen kann und beschreibe den daraus resultierenden Homomorphismus $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \pi_1(T^2)$. Folgere, dass $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Wenn Dir letzteres nicht gelingen sollte, so zeige zumindest, dass $\pi_1(T^2)$ abelsch ist.

Tipp. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist die freie abelsche Gruppe mit zwei Erzeugern, das heißt sie wird durch eine Eigenschaft ganz ähnlich der freien Gruppe mit zwei Erzeugern charakterisiert, nur dass man überall ‚Gruppe‘ durch ‚abelsche Gruppe‘ ersetzen muss.

Zusatzaufgabe 5. Es sei (X, x_0) ein Raum mit Basispunkt, D eine gerichtete Menge und für alle $d \in D$ sei U_d eine offene Teilmenge von X. Für alle $d \in D$ sei die Inklusion $U_d \to X$ mit j^d bezeichnet. Für alle $d, d' \in D$ mit $d \leq d'$ sei $U_d \subset U_{d'}$ und die Inklusion mit $i^{d,d'}$ bezeichnet. Außerdem sei $x_0 \in \bigcap_{d \in D} U_d$ und $X = \bigcup_{d \in D} U_d$. Zeige:

(i) Ist $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, so gibt es ein $d \in D$ und ein $\beta \in \pi_1(U_d, x_0)$, so dass $\alpha = j^d_\#(\beta)$.

(ii) Ist $d \in D$ und $\alpha \in \pi_1(U_d, x_0)$ mit $j^d_\#(\alpha) = 1$, so existiert ein $d' \geq d$ mit $i^{d,d'}_\#(\alpha) = 1$.

(iii) Ist G eine Gruppe und sind für alle $d \in D$ Homomorphismen $f_d \colon \pi_1(U_d, x_0) \to G$ gegeben, so dass $f_{d'} \circ i^{d,d'}_\# = f_d$ für alle d, d' mit $d \leq d'$, so existiert genau ein Homomorphismus $g \colon \pi_1(X, x_0) \to G$ mit $g \circ j^d_\# = f_d$ für alle $d \in D$.

Tipp. Benutze die Kompaktheit von I und $I \times I$.

Bemerkung. Wir haben soeben ein Beispiel für einen *direkten Limes* von Gruppen kennengelernt.

Definition. Eine Abbildung $f\colon S^n \to S^m$ nennen wir *antipodenerhaltend*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^n$.

Zusatzaufgabe 6. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $f\colon S^n \to S^m$ antipodenerhaltend und stetig. Zeige:

(i) Es gibt eine stetige Abbildung $\bar{f}$, so dass

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_n"] & S^m \arrow[d, "p_m"] \\ \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathbb{R}P^m \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(ii) Sind $n, m > 0$, so ist $\bar{f}_\#\colon \pi_1(\mathbb{R}P^n) \to \pi_1(\mathbb{R}P^m)$ nicht trivial.

(iii) Ist $m \leq 1$, so ist $n \leq m$.

Tipp (zu (ii)). Man betrachte wieder Hochhebungen von Wegen.

Bemerkung. (iii) ohne die Einschränkung $m \leq 1$ ist der Satz von Borsuk und Ulam. In einem Buch über Algebraische Topologie wird man nette Folgerungen daraus finden, zum Beispiel das Ham-Sandwich-Theorem. Aus unserer Fassung folgen diese dann zumindest wieder für niedrige Dimensionen.

Nun noch eine Aufgabe, die nichts mit der Fundamentalgruppe zu tun hat[1], aber zum Basteln anregen kann.

Definition. Es sei $\mathbb{R}^\infty$ der Raum der Folgen in $\mathbb{R}$, die schließlich 0 werden. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $i_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\infty$ die offensichtliche Inklusion. $\mathbb{R}^\infty$ trage die Finaltopologie bezüglich der i_n. Es sei $S^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$ der Unterraum $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_{n+1}[S^n]$.

Zusatzaufgabe 7. Zeige, dass S^∞ zusammenziehbar ist.

Tipp. S^n ist zwar für kein n zusammenziehbar (für $n \in \{0, 1\}$ wissen wir das bereits), aber S^n ist in S^{n+1} zusammenziehbar, und wenn man geschickt ist, kann man all diese Homotopien zusammenbasteln.

[1] Das ist vielleicht nicht ganz richtig, für uns stimmt das aber schon.