1. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE“ IM WINTERSEMESTER 2013/14

CARSTEN SCHULTZ

Wie bereits in der Vorlesung gesagt erwarte ich natürlich nicht, dass Sie alle Aufgaben bearbeiten. Einige Aufgaben dienen dazu, dass Sie testen können, ob Ihnen topologische Grundbegriffe ausreichend vertraut sind.

Die erste Aufgabe beweist nicht nur ein ständig ohne Erwähnung benutztes Lemma, sie soll Sie auch daran erinnern, dass wir in topologischen Räumen oft ohne Folgen oder Grenzwerte arbeiten.

Aufgabe 1. Es seien X, Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $A, B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $A \cup B = X$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn die Einschränkungen $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind.

Die nächsten beiden Aufgaben sollen Ihnen dabei helfen, den Begriff des Produkts topologischer Räume zu wiederholen beziehungsweise zu lernen. Sollten Ihnen Produkte nicht ausreichend geläufig sein, können wir diese auch noch etwas besprechen.

Aufgabe 2. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}\colon (X \times Y) \times (X \times Y) &\to \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto d_X(x, x') + d_Y(y, y'). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) $(X \times Y, d_{X\times Y})$ ist ein metrischer Raum.

(ii) Die von $d_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ induzierte Topologie ist die Produkttopologie zu den von d_X und d_Y auf X beziehungsweise Y induzierten Topologien.

Aufgabe 3. Es seien X, Y Räume und $A \subset X$, $B \subset Y$. Zeigen Sie, dass die Topologien, die $A \times B$ als Produkt von Unterräumen und als Unterraum des Produkts $X \times Y$ erhält, übereinstimmen.

Und endlich Aufgaben zu Quotientenräumen, unserem Hauptthema vom Donnerstag.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die in der Vorlesung behaupteten Homöomorphien $\Sigma\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$ und $\mathbb{D}^{n+1}/\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$.

Abgabe: am 24. Oktober 2013 in der Übung.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Räume homöomorph sind.

(i) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,
(ii) $\mathbb{R}^2/\sim$ mit $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
(iii) $I \times I/\sim$, wobei $\sim$ die von $(x, 0) \sim (x, 1)$ und $(0, y) \sim (1, y)$ für alle $x, y \in I$ erzeugte Äquivalenzrelation ist.

Tipp. Man spart sich Arbeit, wenn man die Homöomorphismen zwischen den richtigen Räumen und in der richtigen Richtung angibt.

Aufgabe 6. Es seien X ein Raum, $n \geq 0$, $b \in \mathbb{S}^n$ und $f\colon \mathbb{S}^n \to X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) f ist homotop relativ $\{b\}$ zu der Abbildung, die konstant $f(b)$ ist.
(ii) f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

Tipp. Nutzen Sie die Konvexität von $\mathbb{D}^{n+1}$.

Aufgabe 7. Es sei $\mathrm{C}\,\mathbb{N}$ der Kegel über $\mathbb{N}$ und

$$X := \{((1 - \lambda)n, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \colon \lambda \in [0, 1],\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Es gibt eine stetige Bijektion $\mathrm{C}\,\mathbb{N} \to X$.
(ii) $\mathrm{C}\,\mathbb{N}$ ist nicht homöomorph zu X.

Hinweis (zu (ii)). Diese Teilaufgabe ist etwas schwerer und vor allem für die, die etwas topologische Vorkenntnisse haben, gedacht. Wenn Sie keine hilfreiche Idee haben, können Sie versuchen, die schwächere Aussage zu zeigen, dass die Abbildung aus dem ersten Teil Ihrer Antwort kein Homöomorphismus ist.