4. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE“ IM WINTERSEMESTER 2013/14

CARSTEN SCHULTZ

Die nächste Aufgabe erfordert etwas Analysis. Sie ist für das weitere Verständnis nicht nötig.

Aufgabe 12. Es bezeichne $i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Inklusion und $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \pi(\mathbb{S}^1, (1,0))$ den Isomorphismus aus der Vorlesung.

Es sei $w = (w_1, w_2)\colon I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine glatte (mindestens C^1, aber C^∞ darf angenommen werden) Schleife bei $(1,0)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \frac{-w_2(t)w_1'(t) + w_1(t)w_2'(t)}{w_1(t)^2 + w_2(t)^2}\, dt = 2\pi k,$$

wobei $\pi_1(i)(\Phi(k)) = [w] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (1,0))$.

Bemerkung. Ich sehe prinzipiell zwei Wege, wobei einer den Satz von Stokes benutzt und der andere direkter ist und eine Hochhebung eines Weges und eine geeignete Transformationsformel benutzt. Für letzteren mag es sinnvoll sein, dies zuerst auf den Fall $w[I] \subset \mathbb{S}^1$ zurückzuführen, und wer diese Reduktion nicht hinbekommt, kann sich auch auf diesen Fall beschränken.

Aufgabe 13. Es seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $p^X\colon X \times Y \to X$ und $p^Y\colon X \times Y \to Y$ die Projektionen. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}(p^X_\#, p^Y_\#)\colon \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)\\ \alpha &\mapsto (p^X_\#(\alpha), p^Y_\#(\alpha))\end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Tipp. Dass die Abbildung ein Homomorphismus ist, ergibt sich mit unseren Kenntnissen fast von alleine. Rechnen Sie dann zunächst die Surjektivität nach. Die Injektivität zeigt man dann ganz ähnlich.

Aufgabe 14. Es seien $i_1, i_2\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ die Inklusionsabbildungen $i_1(x) = (x, 1)$, $i_2(x) = (1, x)$. Weiterhin seien $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

(i) Folgern Sie aus der vorhergehenden Aufgabe, dass $i_1(\alpha)i_2(\beta) = i_2(\beta)i_1(\alpha)$.

(ii) Geben Sie für $\alpha = \beta = \Phi(1)$ (mit der Notation aus der Vorlesung) direkt eine Homotopie an, die die Aussage des vorherigen Punktes zeigt, und visualisieren Sie diese.

Aufgabe 15. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass die Abbildung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$, die sich aus der Definition des projektiven Raumes ergibt, eine Überlagerung ist.

Besprechung: am 21. November.