6. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE“ IM WINTERSEMESTER 2013/14

CARSTEN SCHULTZ

Dies sind natürlich etwas viele Aufgaben, es wäre aber schön, wenn Ihr Euch trotzdem mit möglichst vielen beschäftigen könntet. An Donnerstag würde ich vor allem die Aufgaben 19, 22 und 24 schon besprechen wollen.

Aufgabe 19. Geben Sie ein Beispiel für Räume X, Y, einen Punkt $x_0 \in X$ und stetige Abbildungen $f, g\colon X \to Y$, so dass $f \simeq g$ und $f(x_0) = g(x_0)$, aber $f_\# \neq g_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$.

Aufgabe 20. Es sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender Raum und G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen von regulären Überlagerungen von X mit Deckbewegungsgruppe G in Bijektion zu Äquivalenzklassen von Epimorphismen $\phi\colon \pi_1(X, x_0) \to G$ stehen, wobei wir zwei solche Epimorphismen ϕ_1, ϕ_2 äquivalent nennen wollen, wenn ein Automorphismus $h\colon G \to G$ mit $\phi_2 = h \circ \phi_1$ existiert.

Eine k-blättrige Überlagerung $p\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist eine, deren Faser k-elementig ist. Ist $H := p_\#[\pi_1(X, x_0)] \subset \pi_1(Y, y_0) =: G$, so wissen wir, dass dann $|H\backslash G| = k$, H ist also eine Untergruppe vom Index k.

Aufgabe 21. Zeigen Sie, dass alle zweiblättrigen Überlagerungen regulär sind.

Aufgabe 22. Finden Sie alle zweiblättrigen Überlagerungen der Kleinschen Flasche bis auf den Basispunkt berücksichtigende Äquivalenz. Fertigen Sie für jede eine Skizze an, geben Sie die zugehörige Untergruppe der Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche an, und identifizieren sie den überlagernden Raum. Welche dieser Überlagerungen sind ohne Berücksichtigung des Basispunktes äquivalent?

Besprechung: am 5. Dezember.

Aufgabe 23. Geben Sie ein Beispiel für eine nicht reguläre Überlagerung mit nicht trivialer Decktbewegungsgruppe an.

Tipp. Es gibt zum Beispiel eine vierblättrige Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ mit dieser Eigenschaft.

In den folgenden Aufgaben seien $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ die auch in der Vorlesung so bezeichneten Elemente. Wo nötig kann benutzt werden, dass diese beiden Elemente die Gruppe erzeugen.

Aufgabe 24. Geben Sie eine Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ an, so dass D_α ein Element der Ordnung 2 der Deckbewegungsgruppe Δ ist, D_β ein Element der Ordnung 3, und so dass

(i) Δ isomorph zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, der zyklischen Gruppe der Ordnung 6,
(ii) Δ isomorph zu S_3, der Gruppe der Permutationen einer dreielementigen Menge,

ist.

Aufgabe 25. Es sei $H \subset \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, y_0)$ die von $\{\alpha^n \beta \alpha^{-n} : n \geq 0\}$ erzeugte Untergruppe. Es sei $(X, x_0) \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, y_0)$ die zu H korrespondierende Überlagerung.

(i) Skizzieren Sie die Überlagerung.
(ii) Bestimmen Sie die Deckbewegungsgruppe der Überlagerung.
(iii) Für welche Punkte x der Faser $p^{-1}[\{y_0\}]$ exisitiert eine stetige Abbildung $f : (X, x_0) \to (X, x)$ mit $p \circ f = p$? Was ist die algebraische Entsprechung dieser Tatsache?

Bemerkung. Es ist nicht nötig, bei dieser Aufgabe alles bis ins Letzte zu beweisen.