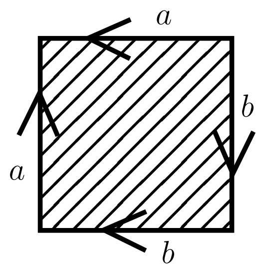
7. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE“ IM WINTERSEMESTER 2013/14

CARSTEN SCHULTZ

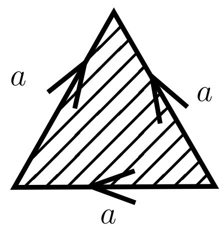
Aufgabe 26. Sei $p\colon X \to Y$ eine zweifache Überlagerung und $D\colon X \to X$ die nicht triviale Deckbewegung. Weiterhin sei $a\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ die Abbildung $a(x) = -x$. Zeige: Existiert eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^2 \to X$ with $D \circ f = f \circ a$, so existiert ein Element der Ordnung 2 in der Fundamentalgruppe von Y.

Aufgabe 27. Betrachte den Raum, der entsteht, wenn in einem Quadrat die beiden in der folgenden Skizze mit a beschrifteten Kanten wie durch die Pfeile angedeutet identifiziert werden und ebenso die beiden mit b beschrifteten Kanten.



Bestimme die Fundamentalgruppe des Raumes.

Aufgabe 28. Betrachte den Raum, der entsteht, wenn in einem Dreieck die drei Kanten wie in der folgenden Skizze durch die Pfeile angedeutet identifiziert werden.



Bestimme die Fundamentalgruppe des Raumes.

Besprechung: am 9. Januar.

Aufgabe 29. Es sei $X = (\mathbb{S}^2 \times I)/\sim$ mit

$$(s,t) \sim (s',t') \iff t = t' \wedge (s = s' \vee (t \in \{0,1\} \wedge s = -s')).$$

(i) Bestimme $\pi_1(X)$.
(ii) Ist diese Gruppe endlich? Ist sie abelsch?

Aufgabe 30. Betrachte den abstrakten Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = &\{M \subset \{1,2,3,4,5,6\} \mid \ |M| \leq 2\} \cup \\ &\{\{1,2,3\},\{1,2,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\}\} \cup \\ &\{\{2,3,4\},\{2,4,6\},\{2,5,6\},\{3,4,5\},\{3,5,6\}\}.\end{aligned}$$

Berechne $\pi_1(|\mathcal{S}|)$ mit Hilfe des Satzes über Fundamentalgruppen von Simplizialkomplexen und identifiziere $|\mathcal{S}|$ als einen uns bereits bekannten Raum.