Abschnitt 0

Präliminarien: Etwas allgemeine Topologie.

Metrische Räume

Eine ebenso richtige wie nichtssagende Antwort auf die Frage, was denn Topologie sei, wäre „das Studium stetiger Abbildungen.“ Stetigkeit kennen wir bisher als Eigenschaft von Funktionen zwischen Teilmengen des euklidischen Raums oder allgemeiner zwischen metrischen Räumen.

0.0 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Funktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, so dass

(i) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$ *(Symmetrie)*,

(iii) $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ für alle $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung)*.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf ihr.

Wir werden den metrischen Raum (X, d) nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

0.1 Beispiele und Definitionen.

▷ Der *euklidische Raum* $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik $d(x, y) = \left(\sum_k (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist wohl der metrische Raum, den wir am besten kennen. Wenn wir von dem $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum reden, ohne näher die Metrik zu bestimmen, werden wir immer diese meinen.

▷ Ist (X, d) ein metrischen Raum und $Y \subset X$, so ist auch $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum. Insbesondere können wir also jede Teilmenge eines euklidischen Raumes als metrischen Raum auffassen.

▷ Eine beliebige Menge X wird durch die *diskrete Metrik*

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

zu einem (nicht sehr spannenden, aber durchaus wichtigen) metrischen Raum.

0.2 Definition (Stetigkeit)**.** Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Ist $x \in X$, so heißt f *stetig in* x, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ein $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ exisitiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt, dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.

Für ein paar wichtige Teilmengen von euklidischen Räumen legen wir Bezeichnungen fest.

0.3 Notation. Es sei

$$I := \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leq x \leq 1\}$$

das Einheitsintervall und für $n \in \mathbb{N}$

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$$

die n-dimensionale Scheibe (auch Ball oder Kugel genannt) und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\}$$

die n-dimensionale Sphäre, wobei $\|\bullet\|$ die euklidische Norm bezeichne.

Homöomorphie

In der Topologie betrachtet man Räume meist nur bis auf Homöomorphie, eine Äquivalenzrelation, die wir jetzt definieren.

0.4 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Etwas direkter ausgedrückt ist ein Homöomorphismus also eine stetige Bijektion, deren Umkehrfunktion auch stetig ist.

0.5 Beispiel. Man betrachte $I^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_k \in I \text{ für alle } k\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} I^n &\to D^n \\ x &\mapsto \begin{cases} 2\frac{x-(1/2,1/2,\ldots,1/2)}{\|x-(1/2,1/2,\ldots,1/2)\|} \max_k |x_k - 1/2|, & x \neq (1/2, 1/2, \ldots, 1/2), \\ 0, & x = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2), \end{cases} \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus mit inverser Abbildung

$$\begin{aligned} D^n &\to I^n \\ x &\mapsto (1/2, 1/2, \ldots, 1/2) + \begin{cases} \frac{x}{2\max_k |x_k|} \|x\|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

wie man durch Nachrechnen feststellt.

0.6 Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 2\pi) &\to S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \\ x &\mapsto (\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, aber *kein* Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung ist bei $(0, 1) \in S^1$ unstetig. In der Tat sind $[0, 2\pi)$ und S^1 nicht homöomorph; um das zu zeigen, könnte man die Kompaktheit von S^1 ausnutzen, oder dass $[0, 2\pi)$ einen Randpunkt hat, S^1 aber nicht, oder dass S^1 nie in zwei Teile zerfällt, wenn man einen Punkt herausnimmt, oder…

0.7 Beispiel. Man betrachte einen Doughnut[1] und eine Kaffeetasse als Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Diese sind homöomorph, wie wir jetzt andeuten wollen. Zunächst schlagen wir von der Tasse den Henkel ab, markieren aber auf beiden Teilen die Bruchstelle. Ebenso schneiden wir den Doughnut so in zwei Teile, dass jeder von ihnen wie ein Henkel aussieht. Nun gibt es schon einmal einen Homöomorphismus von dem Tassenhenkel zu der einen Doughnuthälfte, der Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Die zweite Doughnuthälfte ist ein (gebogener) Zylinder, also, da wir ja bereits in Beispiel 0.5 gesehen haben, dass Kanten nichts ausmachen, ein Ball. Von dem von der Tasse übriggebliebenen Becher bemerken wir, dass er auch bis auf Homöomorphie nichts anderes ist als ein Ball, auch wenn er recht platt ist und gebogen im $\mathbb{R}^3$ liegt. Nun gibt es zwischen diesen beiden Stücken also wieder einen Homöomorphismus, und zwar sogar einen, der wieder Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Das ganze lässt sich so einrichten, dass die beiden Homöomorphismen an der Bruch- beziehungsweise Schnittstelle zusammenpassen und so einen Homöomorphismus von der Tasse zum Doughnut liefern.

[1] Man verzeihe die Amerikanisierung. Natürlich gibt es auch deutsches Gebäck gleicher Form, und das schmeckt sicher auch zu Kaffee.

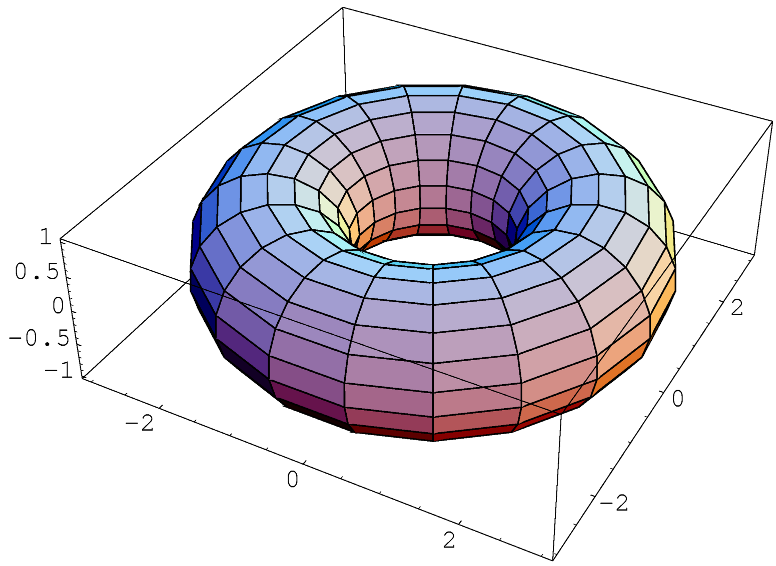

Abbildung 1: Torus in Mathematica

0.8 Beispiel. Den Doughnut aus dem letzten Beispiel nennen wir üblicherweise den Volltorus, seinen Rand den Torus. Als Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$ erhält man sie zum Beispiel als

$$\{(x\sin\phi, x\cos\phi, y)\colon (x,y,\phi)\in\mathbb{R}^3, (x-2)^2+y^2\le 1\}$$

für den Volltorus und

$$\{(x\sin\phi, x\cos\phi, y)\colon (x,y,\phi)\in\mathbb{R}^3, (x-2)^2+y^2= 1\}$$

für den Torus, man vergleiche mit Abbildung 1, die die Mathematica–Ausgabe für

```
ParametricPlot3D[
    {Sin[phi](Sin[rho] + 2), Cos[phi](Sin[rho] + 2), Cos[rho]},
                                      {phi, 0, 2Pi}, {rho, 0, 2Pi}]
```

zeigt. Hier wurde also auch noch $\{(x,y)\colon (x-2)^2+y^2=1\}$ durch $(\sin\rho+2,\cos\rho)$ parametrisiert.

Natürlicher jedoch erhält man zu diesen homöomorphe Räume als Teilmengen des $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, nämlich den Volltorus als $S^1\times D^2$ und den Torus als $S^1\times S^1$. Ein Homöomorphismus ist in beiden Fällen die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3\\ (x_1,x_2,x_3,x_4) &\mapsto ((x_3+2)x_1,(x_3+2)x_2,x_4)\end{aligned}$$

und die Umkehrabbildung die Einschränkung von

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2, x_3 \right)\end{aligned}$$

Das Nachrechnen ist lästig, aber elementar.

0.9 Beispiel. Ist X eine Menge, auf der zwei Metriken d und d' definiert sind, und gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $d'(x, y) \leq Cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} i\colon (X, d) &\to (X, d') \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

stetig (setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$); gibt es außerdem ein $C' > 0$, so dass $d(x, y) \leq C'd'(x, y)$, so ist i ein Homöomorphismus. Dies lässt sich auf die Metriken $d_p(x, y) := (\sum_k |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$ und $d_\infty(x, y) := \max_k |x_k - y_k|$ auf $\mathbb{R}^n$ anwenden, die also alle homöomorphe Räume liefern, denn es ist ja

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y).$$

0.10 Beispiel. Die Abbildung $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, denn sie ist stetig und hat die stetige Umkehrabbildung arctan.

Das letzte Beispiel zeigt, dass Vollständigkeit keine Eigenschaft ist, die von einem Homöomorphismus erhalten bleibt: $\mathbb{R}$ ist vollständig, aber das offene beschränkte Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Das liegt daran, dass stetige Abbildungen im allgemeinen Cauchy-Folgen nicht auf Cauchy-Folgen werfen.

Die letzten beiden Beispiele zeigen, dass eine Metrik viel mehr Information trägt, als man wirklich braucht, wenn man nur an Eigenschaften interessiert ist, die unter Homöomorphie erhalten bleiben. Eine wesentlichere Rolle als die Metrik selbst werden die offenen Mengen spielen, die von ihr bestimmt werden.

Offene Mengen

0.11 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ ist die *ε-Umgebung* eines Punktes $x \in X$ die Menge $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X : d(x, x') < \varepsilon\}$. Eine beliebige Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden der Punkte ist, die sie enthält.

0.12 Bemerkungen.

▷ Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist.

▷ Wir haben den Begriff der offenen Menge mit Hilfe des Begriffes der Umgebung definiert. Andersherum gilt: Eine Menge U ist Umgebung von x, wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$. Beachte, dass wir, im Gegensatz zu einigen älteren Autoren, nicht fordern, dass U selbst offen ist.

0.13 Beispiel. Ist X mit der diskreten Metrik versehen, so gilt für jedes $x \in X$, dass $B_{1/2}(x) = \{x\}$ ist, also ist $\{x\}$ und damit jede Menge, die x enthält, eine Umgebung von x und *jede* Teilmenge von X offen.

Um stetige Abbildungen zu beschreiben, genügt es völlig, die offenen Mengen der beteiligten Räume zu kennen.

0.14 Proposition. *Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist auch $f^{-1}[U]$ offen.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f stetig und $U \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}[U]$, also $f(x) \in U$. Da U offen ist, gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nun ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Das heißt, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[U]$; also ist, da x beliebig gewählt war, $f^{-1}[U]$ offen.

„$\Leftarrow$“: Sei f nicht stetig. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x' \in B_\delta(x)$ gibt, so dass $f(x') \notin B_\varepsilon(f(x))$. Es gibt also kein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ wäre. $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ ist also keine Umgebung von x und damit nicht offen, obwohl $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist. □

0.15 Korollar. *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Mengen $M \subset X$ gilt, dass $f[M]$ genau dann offen ist, wenn M offen ist.* □

Die offenen Mengen sind also tatsächlich, worauf es ankommt, wenn man Räume bis auf Homöomorphie betrachtet. Die folgenden Eigenschaften der Familie der offenen Mengen eines metrischen Raumes sind so fundamental, dass wir sie bald zu Definitionen erheben werden.

0.16 Proposition. *In einem metrischen Raum X gilt:*

(i) Der Schnitt einer endlichen Menge von offenen Mengen ist offen.

(ii) Die Vereinigung einer beliebigen Menge von offenen Mengen ist offen.

(iii) Sind $x, y \in X$ und ist $x \neq y$, so existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Zu (i): Seien $U_1, \dots, U_r$ offen, $r \in \mathbb{N}$, und sei $x \in \bigcap_k U_k$. Dann gibt es $\varepsilon_k > 0$, so dass $B_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_k\}$ ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_k U_k$.

Zu (ii): Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, und U offen für alle $U \in \mathcal{U}$. Sei nun $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$, und damit ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \in U \subset \bigcup \mathcal{U}$.

Zu (iii): Ist $x \neq y$, so ist $\varepsilon := d(x,y)/2 > 0$. Sei nun $z \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $z \notin B_\varepsilon(y)$. Also ist $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. □

Topologische Räume

Wir haben gesehen, dass es, wenn man Räume — das waren bisher metrische Räume — bis auf Homöomorphie betrachtet nur auf die offenen Mengen ankommt und haben angekündigt, die Eigenschaften aus Proposition 0.16 zu Axiomen zu machen. Das geschieht nun.

0.17 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge von X, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für alle $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ ist $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}$.

(ii) Sind $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{k=1}^n O_k \in \mathcal{T}$.

Eine Teilmenge von X heißt *offen*, wenn sie in $\mathcal{T}$ enthalten ist. Ein *topologischer Raum* ist eine Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf ihr.

0.18 Bemerkung. Häufig fordert man auch noch $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, aber das ist in obigem bereits enthalten: Es ist $\emptyset \subset \mathcal{T}$ und $\bigcup \emptyset = \emptyset$, außerdem $0 \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{k=1}^0 O_k = \bigcap \emptyset = X$.

Wie auch schon bei metrischen Räumen werden wir den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

Eine der Eigenschaften, die wir in Proposition 0.16 festgestellt haben, fehlt noch.

0.19 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *hausdorffsch* und damit ein *Hausdorff-Raum* oder auch *T_2-Raum*, wenn zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, Mengen $O_0, O_1 \in \mathcal{T}$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$ existieren.

Das T in T_2 kommt daher, dass es sich um eine Trennungseigenschaft handelt: Je zwei verschiedene Punkte können durch offene Mengen getrennt werden. Die 2 in T_2 verspricht, dass es derer noch mehr gibt.

Die nächste Definition ist durch Proposition 0.14 motiviert.

0.20 Definition. Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine *stetige Abbildung* $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist eine Funktion $f\colon X \to Y$, so dass $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_Y$.

Trivial, aber so wichtig, dass wir es notieren:

0.21 Proposition. *Ist X ein topologischer Raum, so ist die Identität id_X eine stetige Abbildung. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist die Komposition $g \circ f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung.*

Beweis. Es ist $\mathrm{id}^{-1}[O] = O$ und $(g \circ f)^{-1}[O] = f^{-1}\left[g^{-1}[O]\right]$. □

Und schließlich wiederholen wir in diesem neuen Kontext die Definition der Homöomorphie.

0.22 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Homöomorphie war bei metrischen Räumen nur eine von mehreren sinnvollen Äquivalenzrelationen, und eine recht schwache noch dazu, das heißt eine, die einiges an Information ignorierte. Bei topologischen Räumen hingegen ist Homöomorphie eine sehr natürliche Äquivalenzrelation, in gewisser Weise die stärkstmögliche sinnvolle Äquivalenzrelation. Insbesondere ist, wenn $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf derselben Menge X sind, die Funktion

$$\begin{aligned} i\colon (X, \mathcal{T}_1) &\to (X, \mathcal{T}_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Nun ist es aber Zeit für ein paar Beispiele. Eigentlich jedoch war der letzte Teil schon voll von ihnen:

0.23 Beispiel und Definition. Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X, so bilden die bezüglich d offen Teilmengen von X eine Topologie auf X, die *von der Metrik d induzierte Topologie*. Diese Topologie ist hausdorffsch. Ist Y ein weiterer metrischer Raum, so ist eine Funktion $f\colon X \to Y$ genau dann stetig als Abbildung zwischen metrischen Räumen, wenn sie es als Abbildung zwischen den induzierten topologischen Räumen ist.

0.24 Beispiele und Definitionen. Ist X eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ selbst eine Topologie, die *diskrete Topologie*. Wir haben bereits in Beispiel 0.13 gesehen, dass sie von der diskreten Metrik induziert wird.

$\{\emptyset, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie auf X, sie wird manchmal die *indiskrete Topologie* oder auch anschaulicher die *Klumpentopologie* genannt. Hat X mindestens zwei Elemente, so ist sie nicht hausdorffsch, also gibt es keine Metrik, die diese Topologie induzieren würde.

0.25 Beispiel. Ist X eine beliebige Menge, so bilden all die Teilmengen von X, deren Komplemente endlich sind zusammen mit der leeren Menge eine Topologie auf X (Nachrechnen!), die *kofinite Topologie*.

Ist X unendlich, so ist auch die kofinite Topologie auf X nicht hausdorffsch. Nun scheint das wieder eine sehr „komische", nur zum Konstruieren von Gegenbeispielen geeignete Topologie zu sein. Das täuscht aber, denn in der Tat geben algebraische Geometer gerne der eindimensionalen Linie diese Topologie.[2] Wir tun also gut daran, nicht nur Hausdorff-Räume zu betrachten.

0.26 Definition. Ein topologischer Raum heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik gibt, die seine Topologie induziert.

Mehr Mengen

Wir definieren nun für Teilmengen topologischer Räume ein paar Eigenschaften und Operationen, die zumindest für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ schon aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt sein sollten.

0.27 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge von X heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist.

Da Schnitte von Komplementen Komplemente von Vereinigungen und umgekehrt sind, folgt sofort aus der Definition einen topologischen Raumes.

0.28 Proposition. *Sei X ein topologischer Raum, dann gilt:*

(i) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(ii) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Ist X eine Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, und ist die Menge $\{A \subset X : X - A \in \mathcal{T}\}$ abgeschlossen gegenüber beliebigen Schnitten und endlichen Vereinigungen, so ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. □

Eine Topologie kann also genau so gut wie durch Angabe der offenen Mengen durch Angabe der abgeschlossenen Mengen definiert werden.

0.29 Beispiel. In einem mit der kofiniten Topologie versehenen Raum ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie endlich oder gleich dem ganzen Raum ist. Dass dies eine Topologie ist, liegt also im wesentlichen daran, dass Schnitte endlicher Mengen eindlich sind und ebenso endliche Vereinigungen endlicher Mengen.

[2] Dies ist ein sehr spezieller Fall der Zariski-Topologie.

Was wir in Bemerkung 0.12 für Umgebungen in metrischen Räumen festgestellt haben, machen wir wieder zur Definition.

0.30 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$. Die Menge aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$.

0.31 Definitionen und Propositionen. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

$$\operatorname{int} A := \bigcup \{U \subset A \colon U \text{ offen}\}$$

ist die größte in A enthaltene offene Menge und heißt das *Innere* von A.

$$\overline{A} := \bigcap \{C \subset X \colon A \subset C, C \text{ abgeschlossen}\}$$

ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält und heißt der *Abschluss* von A.

$$\partial A := \overline{A} - \operatorname{int} A$$

heißt der *Rand* von A.

Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A, wenn $x \in \operatorname{int} A$, *Berührpunkt* von A, wenn $x \in \overline{A}$ und *Randpunkt* von A, wenn $x \in \partial A$.

An dieser Stelle sei es den StudentInnen ans Herz gelegt, die verschiedenen ihnen bereits bekannten Charakterisierungen und Eigenschaften dieser Begriffe aus diesen Definitionen herzuleiten.

0.32 Definitionen. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht*, wenn $\overline{A} = X$, *nirgends dicht*, wenn $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

Mehr Stetigkeit

Wir haben Stetigkeit bisher nur global definiert. Von metrischen Räumen her kennen wir auch den lokalen Begriff der Stetigkeit in einem Punkt.

0.33 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. f heißt *stetig in x*, wenn für jede Umgebung U von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x ist.

Wir bemerken:

0.34 Proposition. *Eine Funktion $f \colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.* $\square$

Eine einfache Umformulierung der Definition ist

0.35 Proposition. *Eine Funktion $f \colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist in $x \in X$ genau dann stetig, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, so dass $f[U] \subset V$.*

Beweis. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Ist f in x stetig, so ist $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x, und es ist $f\left[f^{-1}[V]\right] \subset V$. Existiert andererseits eine Umgebung U von x mit $f[U] \subset V$, so ist $U \subset f^{-1}[V]$ und auch $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x. □

Für metrische Räume stimmen diese Definitionen mit denen überein, die wir bereits hatten.

0.36 Proposition. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Seien außerdem $\mathcal{T}_{d_X}$ und $\mathcal{T}_{d_Y}$ die von den Metriken induzierten Topologien. Dann sind äquivalent:*

(i) $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *ist stetig in* x.

(ii) $f\colon (X, \mathcal{T}_{d_X}) \to (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ *ist stetig in* x.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Nun existiert ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x, so dass $f[U] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Nun gibt es wiederum ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$, also $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. □

Wir schauen uns den Beweis noch einmal an: Die ε-δ-Definition der Stetigkeit ist fast genau die Beschreibung in Proposition 0.35, nur dass sie nur ε-Umgebungen anstelle beliebiger zulässt. Da es aber genügend viele ε-Umgebungen gibt, macht das keinen Unterschied. Wir formalisieren nun dieses „genügend viele“.

0.37 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine *Umgebungsbasis von x* ist eine Menge $\mathcal{B}$ von Umgebungen von x, so dass es zu jeder Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $V \subset U$.

Was wir also soeben die folgende Tatsache benutzt.

0.38 Proposition. *Ist X ein metrischer Raum und $x \in X$, so ist die Menge $\{B_\varepsilon(x)\colon \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von x.* □

Und eigentlich haben wir das folgende gezeigt.

0.39 Proposition. *Es seien X, Y topologische Räume, $x \in X$, $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Sei außerdem $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x, $\mathcal{B}'$ eine Umgebungsbasis von $f(x)$. Dann ist f in x genau dann stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{B}'$ ein $U \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $f[U] \subset V$.* □

Das ist typisch: Anstatt eine Eigenschaft für alle Umgebungen eines Punktes nachzuprüfen, genügt es häufig, dies nur für alle Elemente einer Umgebungsbasis zu tun.

Man lasse sich nicht von dem Wort Umgebungs*basis* verwirren. Vergleicht man die Situation mit Vektorräumen, so entspricht das eher einem Erzeugendensystem. Zum Beispiel ist ja immer die Menge aller Umgebungen eines Punktes eine Umgebungsbasis.

Unterräume und das Produkt zweier Räume

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes wird auf natürliche Art selbst zu einem topologischen Raum.

0.40 Definition und Proposition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $\{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y, die *Unterraumtopologie.* Y versehen mit der Unterraumtopologie heißt ein *Unterraum* von X.

Die Unterraumtopologie ist gerade so gemacht, dass die Inklusionsabbildung stetig wird. Um das besser formulieren zu können, führen wir zwei Begriffe ein.

0.41 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X. $\mathcal{T}_1$ heißt *gröber* als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ *feiner* als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

0.42 Proposition. *Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Unterraumtopologie die gröbste Topologie auf Y, so dass die Inklusionsabbildung $i\colon Y \to X$ stetig ist.* □

Wir notieren noch eine weitere einfache aber wichtige Eigenschaft.

0.43 Proposition. *Seien X, Z topologische Räume, $Y \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen und $i\colon Y \to X$ die Inklusion. Eine Funktion $f\colon Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $i \circ f$ stetig ist.*

Beweis. Ist f stetig, so auch $i \circ f$, da i stetig ist. Sei nun $i \circ f$ stetig und $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine offene Menge $O \subset X$ mit $U = O \cap Y$, also $U = i^{-1}[O]$. Es folgt, dass $f^{-1}[U] = f^{-1}[i^{-1}[O]] = (i \circ f)^{-1}[O]$ offen ist. □

Eine weitere wichtige Konstruktion ist das Produkt von Räumen. Wir werden Produkte —auch unendlich vieler Räume— später noch genauer behandeln, daher begnügen wir uns hier mit dem Produkt zweier Räume.

Mengen der Form $U \times V$ sollten für offene U, V offen sein; diese bilden allerdings noch keine Topologie, da die Vereinigung zweier Mengen dieser Form nicht wieder von dieser Form zu sein braucht. Wir müssen also Vereinigungen auch noch hinzunehmen. Wir machen dies nun systematisch.

0.44 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Basis* der Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist, so dass also $\mathcal{T} = \{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ gilt.

Da eine Basis offenbar die Topologie bestimmt, kann man die Topologie beschreiben, indem man eine Basis angibt. Dabei ist es hilfreich, zu wissen, wann eine gegebene Familie von Teilmengen Basis einer Topologie ist.

0.45 Proposition. *Sei X eine Menge, und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Ist $\mathcal{B}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten, so ist $\{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ eine Topologie auf X mit Basis $\mathcal{B}$.* $\square$

0.46 Bemerkung. Die Voraussetzung in dieser Proposition kann noch abgeschwächt werden, wir brauchen das aber im Moment nicht.

Wir sind nun bereit, das Produkt zweier topologischer Räume zu definieren.

0.47 Definition. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist die Topologie mit der Basis

$$\{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

$X \times Y$ versehen mit dieser Topologie heißt das *Produkt* der Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Wenn nichts anderes gesagt ist, werden wir immer davon ausgehen, dass $X \times Y$ die Produkttopologie trägt.

Noch bevor wir Produkte genauer untersuchen, können wir feststellen:

0.48 Proposition. *Das Produkt zweier Hausdorffräume ist hausdorffsch.*

Beweis. Seien X, Y Hausdorffräume, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $(x, y) \neq (x', y')$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$, oBdA $x \neq x'$. Seien U, U' disjunkte Umgebungen von x beziehungsweise x'. Dann sind $U \times Y$ und $U' \times Y$ disjunkte Umgebungen von (x, y) beziehungsweise (x', y'). $\square$

Zur Vorbereitung noch ein weiterer Begriff.

0.49 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Subbasis* der Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von $\mathcal{S}$ ist, so dass also $\{\bigcap_{k=1}^n O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

Wir bemerken kurz:

0.50 Proposition. *Ist X eine Menge, so ist jede Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ eine Subbasis einer Topologie auf X.*

Beweis. $\{\bigcap_{k=1}^n O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen und daher nach Proposition 0.45 die Basis einer Topologie. $\square$

Doch nun weiter.

0.51 Proposition. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann ist die Menge*

$$\{O \times Y : O \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times O : O \in \mathcal{T}_Y\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $X \times Y$. $\square$

0.52 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume und*

$$p_1\colon X \times Y \to X \qquad\qquad p_2\colon X \times Y \to Y$$
$$(x,y) \mapsto x \qquad\qquad (x,y) \mapsto y$$

die kanonischen Projektionen. Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $X \times Y$, so dass p_1 und p_2 stetig sind.

Beweis. p_1 ist genau dann stetig, wenn $p_1^{-1}[O] = O \times Y$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist. Ebenso ist p_2 genau dann stetig, wenn alle $X \times O$, $O \subset Y$ offen, offen sind. Nun ist eine Topologie offenbar genau dann die gröbste, in der diese Mengen offen sind, wenn diese Mengen eine Subbasis von ihr bilden. □

Um Stetigkeit nachzuprüfen, genügt es, eine Subbasis zu betrachten:

0.53 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume und $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von Y. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}[O]$ für alle $O \in \mathcal{S}$ offen ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ ist klar, denn alle $O \in \mathcal{S}$ sind offen. “$\Leftarrow$„: Sei $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine Indexmenge I, $n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$ und $O_{ik} \subset \mathcal{S}$ für alle $i \in I, 1 \leq k \leq n_i$, so dass $U = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}$. Nun ist $f^{-1}[O_{ik}]$ für alle i, k offen. Damit ist auch

$$f^{-1}[U] = f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}\right] = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} f^{-1}[O_{ik}]$$

offen. □

0.54 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, dann ist die Produkttopologie die feinste Topologie auf $X \times Y$, so dass für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f\colon Z \to X$ und $g\colon Z \to Y$ die Abbildung*

$$(f,g)\colon Z \to X \times Y$$
$$z \mapsto (f(z), g(z))$$

stetig ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $X \times Y$ mit der Produkttopologie diese Eigenschaft hat. Dazu genügt es nach Proposition 0.53, Urbilder von Elementen einer Subbasis zu betrachten. Sei daher U ein beliebiges Element der Subbasis aus Proposition 0.51, etwa $O \times Y$ mit $O \subset X$ offen. Nun ist $(f,g)^{-1}[U] = (f,g)^{-1}[O \times Y] = f^{-1}[O]$ offen, da f stetig ist.

Bezeichnen wir nun die Produkttopologie mit $\mathcal{T}$ und nehmen wir an, $\mathcal{T}'$ sei eine weitere Topologie auf $X \times Y$ der Eigenschaft aus der Proposition. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} i\colon (X \times Y, \mathcal{T}) &\to (X \times Y, \mathcal{T}') \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Es ist $i = (p_1, p_2)$ und nach Proposition 0.52 sind p_1 und p_2 stetig. Nach der Vorraussetzung an $\mathcal{T}'$ ist also i stetig. Das heißt aber gerade, dass $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. □

Die Propositionen 0.52 und 0.54 ergeben zusammen eine wichtige Charakterisierung der Produkttopologie.

0.55 Korollar. *Seien X, Y Räume. Die Produkttopologie ist die einzige Topologie auf $X \times Y$, die die folgenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:*

(i) Die kanonischen Projektionen auf die Faktoren sind stetig.

(ii) Für einen beliebigen Raum Z und stetige Abbildungen $f\colon Z \to X$ und $g\colon Z \to Y$ ist die Abbildung $(f, g)\colon Z \to X \times Y$ stetig.

□

Zusammenhang

0.56 Definition. Ein Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn er außer X und $\emptyset$ keine Teilmengen hat, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Ein Raum X ist also genau dann nicht zusammenhängend, wenn er sich als disjunkte Vereinigung $A \cup B$ nicht-leerer offener (oder abgeschlossener) Mengen schreiben lässt. Man beachte, dass die Topologie auf X in diesem Fall vollständig von den Unterraumtopologien auf A und B bestimmt wird, denn $U \subset X$ ist dann genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $U \cap B$ offen sind. Man kann in dieser Situation tatsächlich oft A und B einzeln betrachten.

0.57 Beispiele.

- ▷ Ein diskreter Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nur einen Punkt hat.
- ▷ $\mathbb{R} - \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, wie die Zerlegung $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ zeigt.

Ein nicht-triviales Beispiel eines zusammenhängenden Raumes liefert die folgende Charakterisierung.

0.58 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X *ist zusammenhängend.*

(ii) Ist $f\colon X \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und sind* $y, y', m \in \mathbb{R}$ *mit* $y, y' \in \operatorname{im} f$, $y < m < y'$, *dann ist auch* $m \in \operatorname{im} f$.

Beweis. „$\Rightarrow$" Seien f, y, y', m wie in der Proposition. Dann sind die Mengen $f^{-1}[(-\infty, m)]$ und $f^{-1}[(m, \infty)]$ disjunkte offene und nicht-leere Teilmengen von X. Da X zusammenhängend ist, kann die Vereinigung dieser beiden Mengen nicht ganz X sein, also ist $m \in \operatorname{im} f$.

„$\Leftarrow$" Sei $X = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

stetig. Da $0 \notin \operatorname{im} f$, können 1 und -1 nicht beide im Bild von f liegen. Also ist A oder B leer. □

Einen zusammenhängenden Raum kennen wir also aus Analysis I.

0.59 Proposition (Zwischenwertsatz)**.** *Das Einheitsintervall I ist zusammenhängend.* □

Auf eine Wiedergabe des aus dem ersten Semester bekannten Beweises verzichten wir, bemerken aber, dass die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wesentlich war.

Im Beweis von Proposition 0.58 haben wir nebenbei schon fast gezeigt, dass stetige Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend sind.

0.60 Proposition. *Seien X, Y Räume, X zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ stetig und surjektiv. Dann ist Y zusammenhängend.*

Beweis. Sei $Y = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Teilmengen. Dann ist $X = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ und $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = f^{-1}[A \cap B] = \emptyset$, und da f stetig ist, sind $f^{-1}[A]$ und $f^{-1}[B]$ offen. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}[A] = \emptyset$ oder $f^{-1}[B] = \emptyset$. Aus der Surjektivität von f folgt $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. □

Nun noch zwei Propositionen, die später nützlich sein werden.

0.61 Proposition. *Ist X ein Raum und $D \subset X$ dicht und zusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen und nicht-leer. Da A offen und nicht-leer und D dicht ist, ist $A \cap D \neq \emptyset$. Da D zusammenhängend und $A \cap D$ offen-abgeschlossen in D ist, ist nun $A \cap D = D$, also $D \subset A$. Damit ist auch A dicht in X. Da A abgeschlossen ist, ist $A = X$. □

0.62 Proposition. *Sei X ein Raum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Sind alle $M \in \mathcal{M}$ zusammenhängend und ist $X = \bigcup \mathcal{M}$, $M \cap M' \neq \emptyset$ für alle $M, M' \in \mathcal{M}$, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen. Dann ist $A \cap M$ offen-abgeschlossen in M für alle $M \in \mathcal{M}$. Sei nun $A \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $M \in \mathcal{M}$ mit $A \cap M \neq \emptyset$. Da M zusammenhängend ist, ist $A \cap M = M$. Für beliebiges $M' \in \mathcal{M}$ ist nun $\emptyset \neq M \cap M' \subset A \cap M'$, also, da M' zusammenhängend ist, $A \cap M' = M'$. Damit ist $A = X$. □

Komponenten

Wir wollen nun einen gegebenen Raum X als disjunkte Vereinigung zusammenhängender Unterräume darstellen. Man könnte nun hoffen, dass dies immer so möglich sei, dass jeder dieser Unterräume zugleich offen und abgeschlossen ist. Dies wird aber im allgemeinen nicht möglich sein, wie schon das Beispiel $X = \{1/n \colon n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ zeigt: Jeder Unterraum mit mehr als einem Punkt ist nicht zusammenhängend, denn das größte Element kann von dem Rest durch eine offen-abgeschlossene Menge getrennt werden. Andererseits ist aber $\{0\}$ nicht offen in X.

Um dennoch jeden Raum als disjunkte Vereinigung möglichst großer zusammenhängender Teilräume darzustellen, betrachten wir die folgende Äquivalenzrelation.

0.63 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren auf X eine Relation $\sim_{\mathrm{z}}$ durch

$$p \sim_{\mathrm{z}} q :\Longleftrightarrow \text{Es gibt einen zusammenhängenden Unterraum } Z \subset X \text{ mit } p, q \in Z.$$

0.64 Proposition. *$\sim_{\mathrm{z}}$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Zur Reflexivität bemerke, dass einelementige Unterräume zusammenhängend sind. Symmetrie ist klar. Die Transitivität folgt aus Proposition 0.62. □

0.65 Definition. Die Äquivalenzklassen der Relation $\sim_{\mathrm{z}}$ heißen die *Zusammenhangskomponenten* oder kurz *Komponenten* des Raumes.

0.66 Proposition. *Sei X ein Raum.*

(i) Die Komponenten von X sind nicht-leer, und X ist disjunkte Vereinigung seiner Komponenten.

(ii) Jede zusammenhängende Teilmenge von X ist in einer Komponente enthalten.

(iii) Die Komponenten sind abgeschlossen und zusammenhängend.

Die Komponenten sind also maximal zusammenhängende Teilmengen.

Beweis. (i) folgt daraus, dass $\sim_{\mathrm{z}}$ eine Äquivalenzrelation ist, (ii) direkt aus der Definition von $\sim_{\mathrm{z}}$. Sei nun K eine Komponente und $x \in K$. K ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten. Nach Proposition 0.62 ist K zusammenhängend. Da nach Proposition 0.61 der Abschluss von K ebenfalls zusammenhängend ist, muss nach dem bisher gezeigten K selbst abgeschlossen sein. Damit ist auch (iii) gezeigt. $\square$

0.67 Beispiel. Die Komponenten von $\mathbb{R} - \{0\}$ sind $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

0.68 Beispiel. Obiger Diskussion ist zu entnehmen, dass jede einelementige Teilmenge von $\{1/n \colon n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ eine Komponente ist. Dieser Raum enthält also mit $\{0\}$ eine Komponente, die nicht offen ist.

Das Verständnis der Komponenten vereinfacht den Beweis des folgenden Satzes.

0.69 Proposition. *Sind X und Y zusammenhängende Räume, so ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien (x, y) und (x', y') beliebige Punkte von $X \times Y$. Da $\{x\} \times Y \approx Y$ zusammenhängend ist, liegen (x, y) und (x, y') in der selben Komponente von $X \times Y$. Da $X \times \{y'\}$ zusammenhängend ist, liegen (x, y') und (x', y') in der selben Komponente. Damit liegen (x, y) und (x', y') in der selben Komponente, und da sie beliebig gewählt waren, hat $X \times Y$ nicht mehr als eine Komponente. $\square$

Eine Situation, in der die Zerlegung in Komponenten besonders angenehm ist, ist die folgende.

0.70 Definition. Ein Raum heißt *lokal zusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Umgebungen besitzt.

0.71 Proposition. *Die Komponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen.*

Beweis. Sei K eine Komponente und $x \in K$. Dass K abgeschlossen ist, haben wir bereits gezeigt. Nun besitzt x eine zusammenhängende Umgebung. Diese muss in K enthalten sein, also ist K selbst Umgebung von x. Da x beliebig gewählt war, ist K offen. $\square$

Wegzusammenhang

Ein anderer wichtiger Zusammenhangsbegriff ist der des Wegzusammenhangs. Wir gehen nun etwas schneller vor und definieren gleich die entsprechende Äquivalenzrelation.

0.72 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren eine Relation $\sim_{\mathrm{w}}$ durch

$$\begin{aligned}&p \sim_{\mathrm{w}} q :\Longleftrightarrow \\ &\quad \text{Es existiert eine stetige Abbildung } w\colon I \to X \text{ mit } w(0) = p,\ w(1) = q.\end{aligned}$$

Eine solche Abbildung w heißt ein *Weg von p nach q.*

0.73 Proposition. *$\sim_{\mathrm{w}}$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien $p, q, r \in X$. Der konstante Weg

$$\begin{aligned} c_p\colon I &\to X \\ t &\mapsto p \end{aligned}$$

zeigt $p \sim_{\mathrm{w}} p$ und damit die Reflexivität. Sei nun $p \sim_{\mathrm{w}} q$ und w ein Weg von p nach q. Dann ist

$$\begin{aligned} w^-\colon I &\to X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

ein Weg von q nach p, was $q \sim_{\mathrm{w}} p$ und die Symmetrie zeigt. Sei schließlich zusätzlich $q \sim_{\mathrm{w}} r$ und w' ein Weg von q nach r. dann ist

$$\begin{aligned} w * w'\colon I &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

ein Weg von p nach r, was $p \sim_{\mathrm{w}} r$ und die Transitivität zeigt. □

0.74 Definition. Sei X ein Raum. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_{\mathrm{w}}$ heißen die *Wegzusammenhangskomponenten* oder *Wegkomponente* von X. Ein Raum heißt *wegzusammenhängend*, wenn er nicht mehr als eine Wegzusammenhangskomponente besitzt.

0.75 Proposition. *Sei X ein Raum. Ist X wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.*

Beweis. Seien $p, q \in X$ beliebig. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $w\colon I \to X$ von p nach q. Da nach Proposition 0.59 I zusammenhängend ist, ist nach Proposition 0.60 auch $w[I]$ zusammenhängend, also liegen p und q in der gleichen Komponente. Damit hat X nicht mehr als eine Zusammenhangskomponente. □

Dass die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt, macht man sich als Übung an dem Beispiel $\{0\} \times [-1,1] \cup \left\{(x, \sin\frac{1}{x})\colon x > 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$ klar.

0.76 Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn ein $v \in X$ existiert, so dass für alle $p \in X$ und $s \in I$ auch $sv + (1-s)p \in X$.

0.77 Proposition. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist X wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $v \in X$ wie in Definition 0.76 und $p \in X$ beliebig. Dann ist $p \sim_{\mathrm{w}} v$. □

0.78 Korollar. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X wegzusammenhängend.* □

0.79 Definition. Ein Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis (Definition 0.37) aus wegzusammenhängenden Umgebungen besitzt.

0.80 Proposition. *Die Wegzusammenhangskomponenten eines lokal wegzusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein.*

Beweis. Sei K eine Wegzusammenhangskomponente und $x \in K$. Nun existiert eine wegzusammenhängende Umgebung U von x. Da $x' \sim_{\mathrm{w}} x$ für alle $x' \in U$, ist $U \subset K$. Damit ist K offen. Da das Komplement von K aber die Vereinigung aller anderen Wegzusammenhangskompenten ist, ist das Komplement von K auch offen. Damit ist K offen-abgeschlossen.

Nun ist, da die Wegzusammenhangskomponenten zusammenhängend sind, jede Zusammenhangskomponente disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten. Da die Zusammenhangskomponenten selbst zusammenhängend und die Wegzusammenhangskomponenten offen-abgeschlossen sind, kann keine Zusammenhangskomponenten disjunkte Vereinigung von mehr als einer Wegzusammenhangskomponente sein. □

Kompaktheit

Den Begriff der Kompaktheit muss man wohl für jemanden, der eine Analysisvorlesung gehört hat, nicht weiter motivieren. Für uns ist es nur wichtig, aus den verschiedenen Charakterisierungen, die dort kennengelernt wurden und die für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, die richtige als Definition herauszupicken.

0.81 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* (von X), wenn $\bigcup \mathcal{C} = X$, *offene Überdeckung*, wenn zusätzlich $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Eine Teilmenge einer Überdeckung, die selbst Überdeckung ist, heißt *Teilüberdeckung*.

0.82 Definition. Sei X ein topologischer Raum. X heißt *quasikompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Der Raum X heißt *kompakt*, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.

Häufig werden quasikompakte Räume schon kompakt genannt, man lasse also beim Literaturstudium Vorsicht walten.

Da schon bekannt sein sollte, wann Unterräume von euklidischen Räumen kompakt sind, heben wir uns diese noch ein wenig auf und begnügen uns mit einem Beispiel, das zeigt, dass Kompaktheit als Verallgemeinerung von Endlichkeit angesehen werden kann.

0.83 Beispiel. Jeder endliche Raum (in der Tat jeder Raum mit nur endlich vielen offenen Mengen) ist quasikompakt. Ein diskreter Raum X ist genau dann quasikompakt (und damit kompakt), wenn er endlich ist (betrachte die Überdeckung $\{\{x\} : x \in X\}$).

Nun wieder ein wenig Prüfungsvorbereitung für die, die die Analysisprüfung noch nicht hinter sich haben.

0.84 Proposition. *Ein abgeschlossener Unterraum A eines quasikompakten Raumes X ist quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ eine offene Überdeckung von A. Betrachte nun $\mathcal{C}' := \{U \subset X : U \text{ offen}, U \cap A \in \mathcal{C}\}$. Nach der Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem $V \in \mathcal{C}$ ein $U \in \mathcal{C}'$ mit $U \cap A = V$. Daher ist $\mathcal{C}' \cup \{X - A\}$ eine offene Überdeckung von X und hat eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{C}''$. $\{U \cap A : U \in \mathcal{C}''\}$ ist nun eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}$. □

0.85 Proposition. *Eine quasikompakte Teilmenge K eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in X - K$. Es ist zu zeigen, dass $X - K$ Umgebung von x ist. Setze $\mathcal{C} := \left\{X - \overline{U} : U \text{ Umgebung von } x\right\}$. Da X hausdorffsch ist, ist $\bigcup \mathcal{C} = X - \{x\}$, also $\mathcal{C}' := \{U \cap K : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von K. Nun existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}'$, also auch eine endliche Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von X, so dass $\bigcup \left\{X - \overline{U} : U \in \mathcal{U}\right\} \supset K$, also $\bigcap \mathcal{U} \subset X - K$. Nun ist $\bigcap \mathcal{U}$ eine Umgebung von x, also ist auch $X - K$ eine Umgebung von x. □

Stetige Bilder quasikompakter Räume sind quasikompakt.

0.86 Proposition. *Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und X quasikompakt. Dann ist auch Y quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von X. Es gibt daher eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, so dass $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}'\}$ eine Überdeckung von X ist. Aus der Surjektivität von f folgt, dass $\mathcal{C}'$ eine Überdeckung von Y ist: Sei $y \in Y$ und $x \in X$ mit $f(x) = y$. Nun existiert $U \in \mathcal{C}'$ mit $x \in f^{-1}[U]$, also $y = f(x) \in U$. □

Produkte

Eine einfache, aber wichtige Anwendung von Kompaktheit ist die folgende.

0.87 Proposition. *Seien X, Y Räume. Ist Y quasikompakt, $x \in X$ und $O \subset X \times Y$ offen mit $\{x\} \times Y \subset O$, so existiert eine Umgebung U von x, so dass $U \times Y \subset O$.*

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\{V \times W : V \subset X \text{ offen}, W \subset Y \text{ offen}\}$ eine Basis der Produkttopologie ist. Daher gilt, wenn wir

$$\mathcal{C} := \{V \times W : V \text{ Umgebung von } x, W \subset Y \text{ offen}, V \times W \subset O\}$$

setzen, $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mathcal{C}$. Nun ist $\{W \subset Y : \text{Es ex. } V \subset X \text{ mit } V \times W \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von Y. Aus der Quasikompaktheit von Y folgt nun die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq k \leq n$ Umgebungen $V_k \subset X$ von x und offenen Mengen $W_k \subset Y$, so dass $V_k \times W_k \subset O$ und $\bigcup_{k=1}^n W_k = Y$. Nun ist $U := \bigcap_{k=1}^n V_k$ eine Umgebung von x und

$$U \times Y = U \times \bigcup_{k=1}^{n} W_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} (V_k \times W_k) \subset O,$$

wie gefordert. □

Dies ist auch ein Schritt im Beweis der folgenden Proposition.

0.88 Proposition. *Das Produkt zweier quasikompakter Räume ist quasikompakt.*

Beweisskizze. Man nimmt eine beliebige offene Überdeckung von $X \times Y$. Für beliebiges $x \in X$ zeigt man, dass es eine endliche Teilüberdeckung von $\{x\} \times Y$ gibt. Dann wendet man Proposition 0.87 an und schließlich noch die Quasikompaktheit von X. □

Die Ausarbeitung des Beweises eignet sich als Übung.

Metrische Räume

Wenn wir uns nicht zu sehr auf das in der Analysis gezeigte beziehen wollen, sollten wir nun noch zeigen, dass eine Teilmenge eines euklidischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Aufgrund des bisher gezeigten, würde es genügen, zu zeigen, dass das Einheitsintervall kompakt ist; man überlege sich das. Das ginge auch schnell, wäre aber nicht sonderlich spannend. In [Mun75, Chap. 3, Thm. 6.1] findet man eine Verallgemeinerung auf gewisse geordnete Räume. Wir werden eine Verallgemeinerung auf metrische Räume behandeln, wie sie zum Beispiel in [Bre93, I.9] dargestellt ist. Dazu müssen wir allerdings für metrische Räume gewisse Begriffe wie Cauchy-Folgen als bekannt voraussetzen.

0.89 Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

0.90 Definition. Ein metrischer Raum heißt *total beschränkt*, wenn er für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung durch endlich viele ε-Kugeln besitzt.

0.91 Proposition. *In einem metrischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) X ist kompakt.

(ii) X ist vollständig und total beschränkt.

Der Beweis ist im wesentlichen der, mit dem in Analysis II häufig gezeigt wird, dass I^n kompakt ist. Insofern ist die Formulierung der Proposition vielleicht interessanter als der Beweis, da hier in gewisser Weise die richtige Verallgemeinerung gefunden wurde.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei X nicht vollständig und (a_n) eine nicht konvergente Cauchy-Folge. Zu beliebigem $x \in X$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder nicht in $B_\varepsilon(x)$ liegen. Da (a_n) Cauchy-Folge ist, folgt daraus, dass es ein ε_x gibt, so dass nur endlich viele Folgenglieder in $B_{\varepsilon_x}(x)$ liegen. Nun ist $\{B_{\varepsilon_x}(x) \colon x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da in jedem Element dieser Überdeckung nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann sie keine endliche Teilüberdeckung haben. Damit ist X nicht kompakt.

Sei nun X kompakt und $\varepsilon > 0$. Die Menge aller ε-Bälle überdeckt X und aufgrund der Kompaktheit genügen tatsächlich endlich viele. Damit ist X total beschränkt.

„$\Leftarrow$" Sei X vollständig und total beschränkt und $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X. Wir werden die Annahme, dass $\mathcal{C}$ keine endliche Teilüberdeckung habe, zum Widerspruch führen. Setze zunächst $A_{-1} := X$. Angenommen $A_{n-1} \subset X$ sei definiert und werde von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Dann können wir X mit endlich vielen $\frac{1}{2^n}$-Kugeln überdecken, und eine von denen, die A_{n-1} treffen wird wiederum von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Sei A_n eine solche Kugel und x_n ihr Mittelpunkt. Nun ist (x_n) eine Cauchy-Folge und $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ wird von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen einen Punkt, den wir y nennen wollen. Nun gibt es ein $O \in \mathcal{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset O$. Nun gibt es aber ein n, so dass $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y)$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, was zu einem Widerspruch führt. □

0.92 Korollar. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und in der euklidischen Norm beschränkt ist.*

Beweis. Der Unterraum X des vollständigen metrischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist. Wir zeigen nun noch, dass er genau dann beschränkt ist, wenn er total beschränkt ist. Es ist leicht zu sehen, dass ein unbeschränktes X nicht total beschränkt sein kann. Sei nun X beschränkt und $\varepsilon > 0$. Wiederum ist leicht zu sehen, dass es möglich ist, X mit endlich vielen $\frac{\varepsilon}{2}$ Kugeln *in* $\mathbb{R}^n$ zu überdecken. Lasse nun jede Kugel einer solchen Überdeckung weg, falls ihr Schnitt mit X leer ist und ersetze sie ansonsten durch die ε-Kugel um einen Punkt in diesem Schnitt. Dies ergibt eine Überdeckung von X mit endlich vielen ε-Kugeln. □

Trennungsaxiome

Neben der Hausdorffeigenschaften gibt es noch weitere sogenannter Trennungseigenschaften.

Definitionen und erste Eigenschaften

0.93 Definition. Sei X ein Raum. Ein Raum heißt ein *T_i-Raum*, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, wenn er die entsprechende der folgenden Eigenschaften erfüllt.

(T_1) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existiert eine offene Menge $O \subset X$ mit $x_0 \in O$, $x_1 \notin O$.

(T_2) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

(T_3) Für alle Punkte $x \in X$ und abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ mit $x \notin A$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x \in O_0$, $A \subset O_1$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

(T_4) Für alle abgeschlossenen Mengen $A_0, A_1 \subset X$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $A_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

Der Raum X heißt *regulär*, wenn er T_3 und T_1 erfüllt, *normal*, wenn er T_4 und T_1 erfüllt.

0.94 Proposition.

- ▷ *T_1-Räume sind genau die Räume, in denen alle einelementigen Mengen abgeschlossen sind.*
- ▷ *T_2-Räume erfüllen T_1.*
- ▷ *Reguläre Räume erfüllen T_2.*
- ▷ *Normale Räume sind regulär.*

□

0.95 Bemerkung. Alle nicht in der Definition oder dieser Proposition notierten Implikationen gelten nicht. Zum Beispiel gibt es T_3-Räume, die nicht T_2 erfüllen, und T_4-Räume, die nicht T_3 erfüllen.

Bevor all dies zu obskur erscheint, beginnen wir mit einer einfachen Feststellung.

0.96 Proposition. *Metrisierbare Räume sind normal.*

Beweis. Sei X ein Raum, d eine Metrik auf X, die die Topologie induziert und $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt.

Für $M \subset X$ definiert $dist_M(x) := \inf\{d(x,m)\colon m \in M\}$ eine stetige Funktion auf M, wie sich leicht aus der Dreiecksungleichung ergibt. Es ist $dist_M(x) = 0 \iff x \in \overline{M}$. Für $i \in \{0,1\}$ setze nun $O_i := \{x \in X\colon dist_{A_i}(x) < dist_{A_{1-i}}(x)\}$. Dann sind O_0, O_1 disjunkte offene Mengen und $O_i \supset A_i$. □

Kompakte Räume sind normal

Die folgenden Überlegungen werden zeigen, dass kompakte Räume normal sind. Die Zwischenschritte sind es aber wert, notiert zu werden.

0.97 Proposition. *Sei X ein T_2-Raum, $K \subset X$ kompakt und $x \in X \setminus K$. Denn existiert eine offene Menge O mit $K \subset O$ und $x \notin \overline{O}$.*

Beweis. Da X ein T_2-Raum ist, existiert zu jedem $y \neq x$ eine Umgebung U von x, so dass $y \notin \overline{U}$. Daher ist $\left\{K \setminus \overline{U}\colon U \in \mathcal{U}(x)\right\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $U_k \in \mathcal{U}(x)$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus \overline{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k =: O.$$

O ist offen und

$$X \setminus \overline{O} = \operatorname{int} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k \supset \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{int} U_k \ni x.$$

□

0.98 Proposition. *Sei X ein T_2-Raum, $K_0, K_1 \subset X$ kompakt und disjunkt. Dann existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $K_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.*

Beweis. Wir wiederholen den vorherigen Beweis mit K_0 an der Stelle von x, K_1 an der Stelle von K und der soeben gezeigten Eigenschaft an der Stelle der Hausdorff-Eigenschaft.

Wegen Proposition 0.97 ist $\left\{K_1 \setminus \overline{U}\colon U \supset K_0,\ U \text{ offen}\right\}$ eine offene Überdeckung von K_1. Da K_1 kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und offene $U_k \supset K_0$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} (X \setminus \overline{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k =: O_1.$$

O_1 ist offen und mit

$$O_0 := X \setminus \overline{O}_1 = \operatorname{int} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_k = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{int} \overline{U}_k \supset \bigcap_{k=1}^{n} U_k \supset K_0$$

ist auch O_0 offen und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$. □

0.99 Korollar. *Kompakte Räume sind normal.* □

Literatur

Alles, das wir an allgemeiner Topologie benötigen, ist im ersten Kapitel des Lehrbuchs zu Algebraische Topologie von Bredon [Bre93] enthalten.

Ein einführendes Lehrbuch zur allgemeinen Topologie ist [Que73]. Querenburg behandelt auf wenig Raum viel mengentheoretische Topologie.

Wem das alles zu wenig abstrakt ist, der findet wie immer bei Bourbaki Hilfe [Bou65]. Ein ‚echtes' Buch über mengentheoretische Topologie ist Engelkings Werk [Eng77], in dem man angeblich alles findet.

Ein Buch einer ganz anderen Art ist das von Steen und Seebach. Sucht man einen Raum mit Eigenschaften α und β aber weder γ noch δ, so hat man gute Chancen, ihn in [SS70] zu finden.

[Bou65] Bourbaki, N. *Topologie Général*, Bd. 3 von *Éléments de mathématique.* Hermann, Paris, 1965.

[Bre93] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*, Bd. 139 von *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1993.

[Eng77] Engelking, R. *General Topology.* PWN, Warszawa, 1977.

[Mun75] Munkres, J. R. *Topology: a first course.* Prentice-Hall, 1975.

[Que73] von Querenburg, B. *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, 1973.

[SS70] Steen, L. A. und Seebach, J. A., Jr. *Counterexamples in Topology.* Holt, Rinehart and Winston, 1970.