Abschnitt 1

Quotienten

Homotopie, erste Definitionen

Wir betrachten nun das Deformieren einer Abbildung in eine andere.

1.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume und $f_0, f_1 \colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F \colon X \times I \to Y$, so dass $F(x, 0) = f_0(x)$ und $F(x, 1) = f_1(x)$ für alle $x \in X$. Wir nennen f_0 und f_1 zu einander *homotop* und schreiben $f_0 \simeq f_1$, wenn eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 existiert.

Für die Anschauung mag es manchmal sinnvoll sein, sich F als Abbildung vom Zylinder $X \times I$ vorzustellen, und manchmal, F als eine mit der Zeit $t \in I$ variierende Schar von Funktionen

$$\begin{aligned} f_t \colon X &\to Y \\ x &\mapsto F(x, t) \end{aligned}$$

anzusehen.

1.2 Beispiel. Seien X, Y nicht-leere Räume und $f, g \colon X \to Y$ konstante Funktionen. Dann ist $f \simeq g$ genau dann, wenn die Bilder von f und g in der selben Wegzusammenhangskomponente von Y liegen.

1.3 Beispiel. Sei $n \geq 0$ und

$$\begin{aligned} r \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Dann ist $r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ wie die Homotopie

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \\ (x, t) &\mapsto \frac{x}{(1-t)\|x\| + t} \end{aligned}$$

zeigt.

1.4 Definition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Wir sagen, f sei *relativ zu A homotop* zu g, $f \simeq g$ rel A, wenn eine Homotopie $F\colon X \times I \to Y$ zwischen f und g existiert, so dass $F(a,t) = F(a,0)$ für alle $a \in A$, $t \in I$.

Damit $f \simeq g$ rel A gelten kann, muss natürlich $f|_A = g|_A$ erfüllt sein.

1.5 Beispiel. In Beispiel 1.3 ist $r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ rel $\mathbb{S}^{n-1}$.

Quotienten

Um das Konzept einer Quotiententopologie vorzubereiten beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, das zwei verschiedene Arten, Schleifen zu beschreiben, miteinander vergleicht.

1.6 Proposition. *Es sei p die Abbildung*

$$\begin{aligned} p\colon I &\to \mathbb{S}^1, \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Dann ist für jeden Raum X durch $f \mapsto f \circ p$ eine Bijektion

$$\left\{f\colon \mathbb{S}^1 \to X : f \text{ stetig}\right\} \to \{w\colon I \to X : w \text{ stetig}, w(0) = w(1)\}$$

gegeben.

Beweis. Da p stetig mit $p(0) = p(1)$ ist $f \mapsto f \circ p$ eine Abbildung wie angegeben, zu zeigen ist die Bijektivität. Die Injektivität folgt bereits aus der Surjektivität von p. Es sei nun eine stetige Abbildung $w\colon I \to X$ mit $w(0) = w(1)$ gegeben. Da p surjektiv und $p(x) = p(y)$ nur für $x = y$ oder $\{x, y\} = \{0, 1\}$, existiert eine eindeutige Funktion f mit $w = f \circ p$, und es bleibt die Stetigkeit von f zu zeigen. Dazu werden wir zeigen, dass jede Menge $M \subset \mathbb{S}^1$, für die $p^{-1}[M]$ offen ist, selbst offen ist. Dies genügt, denn für eine offene Menge $O \subset X$ ist $p^{-1}[f^{-1}[O]] = (f \circ p)^{-1}[O] = w^{-1}[O]$ offen und damit dann $f^{-1}[O]$ offen.

Es sei also $M \subset \mathbb{S}^1$ und $p^{-1}[M]$ offen. Um (hoffentlich) die Notation weniger verwirrend zu gestalten setzen wir $y_0 := (1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Da p einen Homöomorphismus $(0, 1) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{y_0\}$ induziert, ist die Menge $M \setminus \{y_0\} = p[p^{-1}[M] \setminus \{0, 1\}]$ offen in $\mathbb{S}^1$. Ist $y_0 \notin M$, so sind wir also bereits fertig. Ansonsten ist $\{0, 1\} \subset p^{-1}[M]$. Da M offen ist, existiert nun ein ε, $0 < \varepsilon < 1$, so dass $[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1] \subset p^{-1}[M]$. Nun ist aber $U_\varepsilon := p[[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]]$ offen, wie man sich leicht überzeugt, also ist auch $M = (M \setminus \{y_0\}) \cup U_\varepsilon$ offen. □

Der Eigenschaft, die wir für p gerade nachgewiesen haben, geben wir einen Namen.

1.7 Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine *Quotientenabbildung*, wenn sie stetig und surjektiv ist und für jeden Raum Z und jede Funktion $f\colon Y \to Z$, für die $f \circ Y$ stetig ist, bereits f stetig ist.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[r, dotted, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

1.8 Proposition. *Eine injektive Quotientenabbildung ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Ist f eine injektive Quotientenabbildung, so ist f bijektiv und f^{-1} stetig, da $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ stetig ist. $\square$

1.9 Proposition und Definition. *Ist X ein topologischer Raum, M eine Menge und $p\colon X \to M$ eine Surjektion, so gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf M, für die $p\colon X \to (M, \mathcal{T})$ eine Quotientenabbildung ist, nämlich*

$$\mathcal{T} := \Big\{ O \subset M : p^{-1}[O] \textit{ ist offen} \Big\}.$$

Diese heißt die Quotiententopologie *(oder auch* Finaltopologie*) zu p.*

Beweis. Dass die so definierte Menge $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M, also abgeschlossen unter Vereinigungen und endlichen Schnitten ist, folgt daraus, dass $O \mapsto p^{-1}[O]$ mit diesen Mengenoperationen vertauscht.

Versieht man M mit dieser Topologie, so ist p offenbar stetig. Dass p damit auch Quotientenabbildung ist, sieht man wie zuvor: Ist $f\colon M \to Z$ eine Funktion und $f \circ p$ stetig, so ist für offenes $O \subset Z$ auch $(f \circ p)^{-1}[O] = p^{-1}[f^{-1}[O]]$ offen, also $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$.

Es seien nun $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf M und schreiben wir

$$\begin{aligned} q_i\colon X &\to (M, \mathcal{T}_i), & \qquad j\colon (M, \mathcal{T}_1) &\to (M, \mathcal{T}_2), \\ x &\mapsto p(x), & x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ist q_2 stetig und q_1 Quotientenabbildung, so ist wegen $j \circ q_1 = q_2$ die Abbildung j stetig, das heißt $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Sind beides Quotientenabbildungen, so ist also $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, was die Eindeutigkeit zeigt. $\square$

Die folgende Proposition ist sehr nützlich und hätte uns in der Tat den lästigen Teil des Beweises von Proposition 1.6 erspart.

1.10 Proposition. *Seien X, Y Räume, X quasikompakt, Y hausdorffsch und sei $p\colon X \to Y$ eine stetige Surjektion. Dann ist p eine Quotientenabbildung.*

Beweis. Sei Z ein Raum und $f\colon Y \to Z$ eine Funktion, so dass $f \circ p$ stetig ist.

Sei $A \subset Z$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}[A]$ abgeschlossen ist. Da $f \circ p$ stetig ist, ist $p^{-1}[f^{-1}[A]]$ abgeschlossen, also nach Proposition 0.84 quasikompakt. Nach Proposition 0.86 ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]]$ quasikompakt und nach Proposition 0.85 abgeschlossen. Da p surjektiv ist, ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]] = f^{-1}[A]$. □

1.11 Korollar. *Ist $h\colon X \to Y$ eine stetige Bijektion von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorffraum, so ist h ein Homöomorphismus.* □

1.12 Proposition. *Es seien $n \geq 0$, X ein Raum, $f\colon \mathbb{S}^n \to X$ eine stetige Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) Die Abbildung f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(ii) Es existiert eine stetige Abbildung $F\colon \mathbb{D}^{n+1} \to X$ mit $F|_{\mathbb{S}^n} = f$.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{S}^n \times I &\to \mathbb{D}^{n+1}, \\ (x,t) &\mapsto (1-t)x. \end{aligned}$$

Ist F wie in (ii), so definiert $H = F \circ p$ eine Abbildung wie in (i).

Ist andererseits H gegeben, so definieren wir

$$F(y) := \begin{cases} H(y/\|y\|, 1-\|y\|), & y \neq 0, \\ H(*, 1), & y = 0, \end{cases}$$

wobei $*$ eine beliebiger Punkt aus $\mathbb{S}^n$ sei. Da H auf $\mathbb{S}^n$ konstant ist, gilt $H = F \circ p$. Da p nach Proposition 1.10 eine Quotientenabbildung ist, ist F stetig. □

Äquivalenzrelationen

Quotiententopologien formalisieren das anschauliche Konzept des Verklebens von Räumen an Punkten. Um das besser zu verstehen, beschäftigen wir uns kurz mit surjektiven Abbildungen und ihrem Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen.

Seien zunächst M, N Mengen und $f\colon M \to N$ eine Funktion. Dann definiert f eine Äquivalenzrelation $\sim_f$ auf M durch $x \sim_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Ist andererseits $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und bezeichnet $M/{\sim}$ die Menge der Äquivalenzklassen, so definiert dies eine surjektive Funktion $q\colon M \to M/{\sim}$ durch $q(x) := [x]_\sim$. Ist nun $\sim$ eine Äquivalenzrelation, q die zugehörige Surjektion auf die Äquivalenzklassen und $\sim_q$ die hierdurch definierte Relation, so ist offenbar $\sim_q = \sim$. Ist andererseits $f\colon M \to N$ surjektiv, so existiert genau eine Bijektion $M/\sim_f \to N$, die

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "x\mapsto[x]"'] & N \\ & M/\sim_f \arrow[u, tail, two heads] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Wenn einen also nicht interessiert, was die Elemente von N sind —und bei Räumen schauen wir uns ja meist nicht an, was ein ‚Punkt' ist—, so wird die Surjektion f vollständig durch die Relation $\sim_f$ beschrieben.

Wir legen entsprechend noch Notation fest.

1.13 Notation. Ist X ein Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so bezeichnet $X/\sim$ den Raum, der aus der Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ versehen mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Surjektion $X \to X/\sim$ besteht.

Das Zusammenschlagen von Unterräumen

Für einen häufig vorkommenden Fall führen wir eine einfachere Notation ein.

1.14 Notation. Sei X ein Raum und $A \subset X$. Ist $\sim$ die Äquivalenzrelation auf X mit

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A),$$

die A zu einem Punkt identifiziert, so schreiben wir

$$X/A$$

für den Quotientenraum $X/\sim$. Sind etwas allgemeiner $A_1, \dots, A_n \subset X$ paarweise disjunkt und

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A_1) \vee \cdots \vee (x, y \in A_n),$$

so schreiben wir

$$X/(A_1, \dots, A_n)$$

für $X/\sim$.

1.15 Definition. Sei X ein Raum. Dann nennen wir

$$CX := X \times I/X \times \{1\}$$

den *Kegel* über X und

$$\Sigma X := X \times I/(X \times \{0\}, X \times \{1\})$$

die *Einhängung* von X.

1.16 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(i) $C\mathbb{S}^n \approx \mathbb{D}^{n+1}$,

(ii) $\Sigma\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$,

(iii) $\mathbb{D}^{n+1}/\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$.

Wir zeigen den ersten Teil und lassen die beiden anderen zur Übung.

Beweis von (i). Es sei $q\colon \mathbb{S}^n \times I \to C\mathbb{S}^n$ die Quotientenabbildung aus der Definition des Kegels. Wir benutzen auch wieder die Abbildung

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{S}^n \times I &\to \mathbb{D}^{n+1}, \\ (x,t) &\mapsto (1-t)x. \end{aligned}$$

aus dem Beweis von Proposition 1.12. Wir stellen fest, dass p surjektiv ist und $p(y) = p(y') \iff q(y) = q(y')$ für alle $y, y' \in \mathbb{S}^n \times I$ gilt.

Wegen der Surjektivät von q und $q(y) = q(y') \Longrightarrow p(y) = p(y')$ existiert eine eindeutige Abbildung $h\colon C\mathbb{S}^n \to \mathbb{D}^{n+1}$ mit $p = h \circ q$. Da q Quotientenabbildung ist und p stetig ist, ist h stetig.

Da p surjektiv ist, ist h surjektiv.

Wegen $p(y) = p(y') \Longrightarrow q(y) = q(y')$ ist p injektiv.

Also ist p eine stetige Bijektion. Wir können den Beweis nun auf zwei fast gleiche Arten beenden.

Variante 1. Da $\mathbb{S}^n \times I$ quasikompakt und q surjektiv ist, ist auch $C\mathbb{S}^n$ quasikompakt. Außerdem ist $\mathbb{D}^{n+1}$ hausdorffsch. Nach Korollar 1.11 ist damit h ein Homöomorphismus.

Variante 2. Da $\mathbb{S}^n \times I$ quasikompakt und $\mathbb{D}^{n+1}$ hausdorffsch ist, ist die Surjektion p nach Proposition 1.10 eine Quotientenabbildung. Da $q = h^{-1} \circ p$ stetig ist, ist daher auch h^{-1} stetig, also h ein Homöomorphismus. □

Sehen wir uns den Beweis in Variante 2 noch einmal an, sehen wir, dass wir nebenbei die folgende Tatsache gezeigt haben. Dies ist nur eine andere Art, die Eindeutigkeit der Quotiententopologie zu formulieren.

1.17 Lemma. *Seien X, Y_0, Y_1 Räume und $q_i\colon X \to Y_i$ Quotientenabbildungen. Ist für alle $x, x' \in X$ genau dann $q_0(x) = q_0(x')$, wenn $q_1(x) = q_1(x')$, so existiert eine eindeutig bestimmte Funktion h, so dass*

$$\begin{tikzcd} & Y_0 \arrow[dd, tail, two heads, "h"] \\ X \arrow[ur, two heads, "q_0"] \arrow[dr, two heads, "q_1"'] & \\ & Y_1 \end{tikzcd}$$

kommutiert, und h ist ein Homöomorphismus. □

Projektive Räume

Bisher haben wir Quotienten betrachtet, die homöomorph zu Räumen waren, die wir bereits gut kannten. Spannender ist es, mit Hilfe von Quotienten neue Räume zu erschaffen.

Definition und erste Eigenschaften

1.18 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der *n-dimensionale (reell-)projektive Raum*, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, ist definiert durch

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \mathbb{S}^n/{\sim},$$

wobei für $x, y \in \mathbb{S}^n$

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x = -y).$$

Es werden also Antipoden identifiziert.

Wir sollten kurz zwei Begriffe einführen, auf die wir bisher verzichtet haben.

1.19 Definition. Seien X, Y Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. f heißt *offen*, wenn $f[O]$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist, *abgeschlossen*, wenn $f[A]$ für jede abgeschlossenene Menge $A \subset X$ abgeschlossen ist.

Man mache sich klar, dass diese beiden Begriffe *nicht* äquivalent sind.

1.20 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die Quotientenabbildung, die sich aus der Definition des projektiven Raums ergibt. Dann ist p eine offene Abbildung.*

Beweis. Es bezeichne $a\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ den Homöomorphismus $x \mapsto -x$. Ist nun $O \subset X$ offen, so ist $p^{-1}[p[O]] = O \cup a[O]$ offen, also $p[O]$ offen. □

1.21 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist hausdorffsch.*

Beweis. Seien $y, y' \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Es seien p und a wie eben. Wir wählen $x, x' \in \mathbb{S}^n$ mit $p(x) = y$ und $p(x') = y'$. Seien nun $U_0, {U_0}'$ offene disjunkte Umgebungen von x und x' und ebenso $U_1, {U_1}'$ offene disjunkte Umgebungen von x und $-x'$. Setze nun $V := p[U_0 \cap U_1]$ und $V' := p[U_0' \cap a[U_1']]$. Da p eine offene Abbildung ist, sind V und V' offen, außerdem ist $y \in V$ und $y' \in V'$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} p^{-1}[V \cap V'] &= \big((U_0 \cap U_1) \cup a[U_0 \cap U_1]\big) \cap \big((U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0'] \cap U_1')\big) \\ &= (U_0 \cap U_1 \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (U_0 \cap U_1 \cap a[U_0'] \cap U_1') \\ &\quad \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap a[U_0'] \cap U_1') \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset, \end{aligned}$$

also $V \cap V' = \emptyset$. □

1.22 Bemerkung. Das wäre vielleicht etwas einfacher gegangen, hätte man die euklidische Metrik auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ benutzt.

Eine andere Darstellung

Wir können die projektiven Räume auch auf eine andere Art erhalten.

1.23 Proposition. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{D}^n$ mit*

$$x \sim y \iff (x = y) \vee ((x, y \in \mathbb{S}^{n-1}) \wedge (x = -y)),$$

so ist $\mathbb{D}^n/{\sim} \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Beweis. Es sei $p\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die Quotientenabbildung und h der Homöomorphismus von $\mathbb{D}^n$ auf die obere Halbkugel von $\mathbb{S}^n$

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{D}^n &\to \mathbb{S}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}). \end{aligned}$$

Da zu jedem $y \in \mathbb{S}^n$ ein $x \in \mathbb{D}^n$ mit $h(x) = y$ oder $h(x) = -y$ existiert, ist $p \circ h$ surjektiv. Da $\mathbb{D}^n$ quasikompakt und $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ hausdorffsch ist, ist also $p \circ h$ eine Quotientenabbildung. Nun sieht man, dass für $x, x' \in \mathbb{D}^n$ genau dann $(p \circ h)(x) = (p \circ h)(x')$ gilt, wenn $x \sim x'$. Mit Lemma 1.17 folgt die Behauptung. □

Quotienten und Produkte

Ist $X \to Y$ eine Quotientenabbildung, so können wir stetige Abbildungen aus Y heraus konstruieren, indem wir auf X geeignete stetige Abbildungen angeben. Manchmal wollen wir aber nicht nur eine Abbildung konstruieren, sondern eine Familie solcher, die stetig durch einen weiteren Z parametrisiert werden sollen, also eine Abbildung aus $Y \times Z$ heraus. Hierzu wäre es nützlich, wenn auch die induzierte Abbildung $X \times Z \to Y \times Z$ eine Quotientenabbildung wäre. Dies ist sie auch, aber nur unter einer Annahme an Z, die zum Glück für den häufigen Fall $Z = I$ (wir wollen ja Homotopien untersuchen) erfüllt ist. Dazu rufen wir uns einiges über Kompaktheit in Erinnerung.

Zunächst eine Folgerung aus (fast eher eine Umformulierung von) Proposition 0.87.

1.24 Lemma. *Es seien X, Y Räume, $O \subset X \times Y$ offen und $K \subset Y$ quasikompakt. Dann ist $U := \{x \in X\colon \{x\} \times K \subset O\}$ offen.*

Beweis. Es sei $x \in U$. Wir setzen $\tilde{O} := O \cap (X \times K)$. Dann ist $\{x\} \times K \in \tilde{O}$ und nach Proposition 0.87 existiert eine Umgebung V von x, so dass $V \times K \subset \tilde{O}$, also $V \subset U$. Damit ist U Umgebung von x. Da $x \in U$ beliebig gewählt war, ist U offen. □

Lokalkompakte Räume sind als Hausdorffräume, in denen jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat, definiert. In der Tat hat in ihnen jeder Punkt beliebig kleine kompakte Umgebungen.

1.25 Definition. Sei X ein Raum. X heißt *lokal kompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt von x eine kompakte Umgebung besitzt.

1.26 Proposition. *Es sei X ein lokal kompakter Raum, $x \in X$ und U eine Umgebung von x. Dann existiert eine kompakte Umgebung K von x, so dass $K \subset U$.*

Beweis. Da X lokal kompakt ist, hat x eine kompakte Umgebung K_0. Nach Proposition 0.97 existiert eine offene Menge $W \supset K_0 \setminus \operatorname{int} U$ mit $x \notin \overline{W}$. Setzen wir $K := K_0 \setminus W$, so ist K eine kompakte Umgebung von x und $K \subset U$. □

Nun das Ergebnis.

1.27 Lemma. *Sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung und Z ein lokal kompakter Raum. Dann ist die Abbildung $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ eine Quotientenabbildung.*

Beweis. Die Abbildung $q \times \mathrm{id}_Z$ ist stetig und surjektiv. Sei $U \subset Y \times Z$ mit $\tilde{U} := (q \times \mathrm{id}_Z)^{-1}[U]$ offen. Es ist zu zeigen, dass U offen ist.

Sei $(y, z) \in U$. Da Z lokal kompakt ist, hat z eine kompakte Umgebung K, so dass $\{y\} \times K \subset U$. Setze $V := \{y' \in Y\colon \{y'\} \times K \subset U\} \ni y$. Es ist $q^{-1}[V] = \{x \in X\colon \{q(x)\} \times K \subset U\} = \left\{x \in X\colon \{x\} \times K \subset \tilde{U}\right\}$ nach Lemma 1.24 offen, also ist, da q eine Quotientenabbildung ist, V offen. Nun ist $(y, z) \in V \times K \subset U$ und damit U eine Umgebung von (y, z). □