Abschnitt 2

Homotopie

Homotopie

Den Begriff der Homotopie von Abbildungen haben wir bereits in Definition 1.1 und Definition 1.4 eingeführt. Wir zeigen nun grundlegende Eigenschaften.

2.1 Proposition. *Seien X, Y Räume. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y.*

Beweis. Es seien $f, g, h\colon X \to Y$ stetig.

Die stetige Funktion

$$\begin{aligned} X \times I &\to Y \\ (x,t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

zeigt $f \simeq f$ und damit die Reflexivität von $\simeq$.

Ist $f \simeq g$ und F eine Homotopie zwischen f und g, so ist mit

$$\begin{aligned} r\colon I &\to I \\ t &\mapsto 1-t \end{aligned}$$

$F \circ (\mathrm{id}_X \times r)$ eine Homotopie zwischen g und f, also $g \simeq f$, was die Symmetrie von $\simeq$ zeigt.

Ist $f \simeq g$ und $g \simeq h$ und mit zugehörigen Homotopien F und G, so ist

$$\begin{aligned} X \times I &\to Y \\ (x,t) &\mapsto \begin{cases} F(x,2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen f und h. Für die wohldefiniert beachte, dass $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$ und für die Stetigkeit, dass $X \times [0, \frac{1}{2}]$ und $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ in $X \times I$ abgeschlossen sind. Dies zeigt $f \simeq h$ und die Transitivität von $\simeq$. $\square$

Die Komposition von Abbildungen respektiert die Äquivalenzrelation Homotopie:

2.2 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume und $f, f'\colon X \to Y$, $g, g'\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Beweis. Ist F eine Homotopie zwischen f und f', so ist $g \circ F$ eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $g \circ f'$. Ist G eine Homotopie zwischen g und g', so ist $G \circ (f' \times \mathrm{id}_I)$ eine Homotopie zwischen $g \circ f'$ und $g' \circ f'$. Es ist also $g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f'$. □

Entsprechendes gilt für Homotopie relativ zu einem Unterraum.

2.3 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$. Dann ist Homotopie relativ zu A eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Man wiederhole den Beweis, den wir oben für $A = \emptyset$ gegeben haben. □

2.4 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume, $A \subset X$ und $f, f'\colon X \to Y$, $g, g'\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f'$ rel A und $g \simeq g'$ rel $f[A]$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$ rel A.* □

Nützlich ist auch die folgende Tatsache.

2.5 Proposition. *Seien X ein Raum, $A \subset X$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f, g\colon X \to Y$. Ist $f|_A = g|_A$ und Y konvex, so ist $f \simeq g$ rel A.*

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} H\colon X \times I &\to Y \\ (x, \lambda) &\mapsto (1 - \lambda) f(x) + \lambda g(x). \end{aligned}$$

Es ist $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem ist $H(a, \lambda) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $\lambda \in I$. □

2.6 Beispiel. Ist X ein Raum und sind $w, w'\colon I \to X$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt, also $w(0) = w'(0)$, so ist $w \simeq w'$ rel $\{0\}$: Ist $c_0\colon I \to I$ die Abbildung, die konstant 0 ist, so ist nämlich, da I konvex ist, $c_0 \simeq \mathrm{id}_I$ rel $\{0\}$ und daher

$$\begin{aligned} w &= w \circ \mathrm{id}_I \\ &\simeq w \circ c_0 \text{ rel } \{0\} \\ &= w' \circ c_0 \\ &\simeq w' \circ \mathrm{id}_I \text{ rel } \{0\} \\ &= w'. \end{aligned}$$

Andererseits scheint auch offensichtlich, dass für

$$w\colon I \to \mathbb{S}^1, \qquad\qquad w'\colon I \to \mathbb{S}^1$$
$$s \mapsto (\cos s\pi, \sin s\pi) \qquad\qquad s \mapsto (\cos s\pi, -\sin s\pi),$$

also zwei Wege in von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ in $\mathbb{S}^1$, wobei einer oben, der andere unten entlang geht, gilt, dass

$$w \not\simeq w' \text{ rel } \{0,1\},$$

dass es also nicht möglich ist, den einen Weg in den anderen zu überführen, wenn man beide Endpunkte festhält. Das ist auch in der Tat wahr, wir werden aber noch einiges an Vorbereitung benötigen, um das zu zeigen.

Zusammenziehbare Räume

Wir definieren nun noch eine Klasse von Räumen, die aus der Sicht der Homotopietheorie trivial sind.

2.7 Definition. Sei X ein Raum. Wir sagen X sei *zusammenziehbar*, wenn $X \neq \emptyset$ und die Identitäbsabbildung id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

2.8 Beispiel. Nicht-leere konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind zusammenziehbar.

Beispiele von nicht zusammenziehbaren Räumen anzugeben, fällt uns schwerer. Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind nicht zusammenziehbar, aber für $n > 0$ können wir das noch nicht zeigen. Leicht ist hingegen, dass zusammenziehbare Räume wegzusammenhängend sind. In der Tat können wir etwas allgemeineres zeigen.

2.9 Definition. Es sei X ein Raum, $n \geq -1$. Der Raum X heißt *n-zusammenhängend*, wenn sich jede stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^k \to X$, $-1 \leq k \leq n$ zu einer stetigen Abbildung $F\colon \mathbb{D}^{k+1} \to X$ fortsetzen lässt.

Wir sehen:

2.10 Proposition. *Ein Raum ist genau dann (-1)-zusammenhängend, wenn er nicht-leer ist, und 0-zusammenhängend, wenn er nicht-leer und wegzusammenhängend ist.* □

2.11 Proposition. *Ist X ein zusammenziehbarer Raum, so ist X n-zusammenhängend für jedes n.*

Beweis. Da der Raum X nicht-leer ist, ist er (-1)-zusammenhängend. Es sei $f\colon \mathbb{S}^k \to X$ eine stetige Abbildung, $k \geq 0$. Da id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist, ist es nach Proposition 2.2 auch $f = \mathrm{id}_X \circ f$. Nach Proposition 1.12 lässt sich f damit auf $\mathbb{D}^{k+1}$ fortsetzen. □

2.12 Bemerkung. Für ausreichend anständige Räume gilt auch die Umkehrung (Satz von Whitehead).

Wir halten noch fest:

2.13 Proposition. *Ist X ein Raum, so ist der Kegel über X zusammenziehbar.*

Beweis. Zur Übung. □