Abschnitt 4

Erste Anwendungen von $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ und mehr Elementares über π_1

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Bisher haben wir nur die Fundamentalgruppen kontrahierbarer Räume und der Kreislinie berechnet. Das genügt aber schon für die folgende Proposition.

4.1 Proposition. *Es gibt keine stetige Retraktion von der Kreisscheibe auf die Kreislinie, das heißt keine stetige Abbildung* $r\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ *mit* $r|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.

Beweis. Sei $p \in \mathbb{S}^1$ ein Punkt, $i\colon (\mathbb{S}^1, p) \to (\mathbb{D}^2, p)$ die Inklusion, und $r\colon (\mathbb{D}^2, p) \to (\mathbb{S}^1, p)$ stetig. Wir nehmen an, dass $r \circ i = \mathrm{id}$, dass also das Diagramm von Räumen mit Basispunkt

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{S}^1, p) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{(\mathbb{S}^1,p)}"'] & (\mathbb{D}^2, p) \arrow[d, "r"] \\ & (\mathbb{S}^1, p) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wegen Proposition 3.8 erhalten wir daraus das kommutative Diagramm von Gruppen

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1,p)}"'] & \pi_1(\mathbb{D}^2, p) \arrow[d, "r_\#"] \\ & \pi_1(\mathbb{S}^1, p). \end{tikzcd}$$

Da $\mathbb{D}^2$ zusammenziehbar ist, ist $\pi_1(\mathbb{D}^2, p)$ trivial. Damit ist auch die Komposition $r_\# \circ i_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1,p)}$ trivial. Dies ist ein Widerspruch zu $\pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Dies ist auch für Abbildungen $\mathbb{D}^{m+1} \to \mathbb{S}^m$ wahr. Der Fall $m = 0$ ist gerade der Zwischenwertsatz, der Fall $m > 1$ liegt nicht im Bereich der Methoden, die wir im Moment zur Verfügung haben.

Als direkte Folgerung haben wir:

4.2 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension 2)**.** *Jede stetige Abbildung $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ stetig und fixpunktfrei. Wir zeigen, dass die Existenz einer stetigen Retraktion $r\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ folgt, was der vorhergehenden Proposition widerspricht.

Die folgende Konstruktion ist an dieser Stelle die übliche, da man dazu eine gute Zeichnung anfertigen kann. Man tue dies. Sei $x \in \mathbb{D}^2$. Da $f(x) \neq x$ existiert ein eindeutig bestimmter von $f(x)$ ausgehender Strahl, der durch x geht. Man definiere $r(x)$ als den Schnittpunkt dieses Strahls mit $\mathbb{S}^1$. Offenbar ist für $x \in \mathbb{S}^1$ dann $r(x) = x$. Leider ist es etwas lästig, die Stetigkeit von r nachzurechnen.

Eine alternative Konstruktion, bei der die Stetigkeit sofort ersichtlich ist, findet man in [Bre93, 11.12]. □

Abbildungsgrad und der Fundamentalsatz der Algebra

Im folgenden identifizieren wir $\mathbb{S}^1$ mit der Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1.

4.3 Definition. Sei $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ eine stetige Abbildung. Wir definieren den *Grad von f*, $\deg f \in \mathbb{Z}$ wie folgt. Sei

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon (\mathbb{S}^1, 1) &\to (\mathbb{S}^1, 1), \\ z &\mapsto f(z)/f(1) \end{aligned}$$

und Φ der Isomorphismus aus Proposition 3.23. Dann sei $\deg f$ die ganze Zahl, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[r, "\bar{f}_\#"] & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\Phi"', "\cong"] \arrow[r, "\cdot \deg f"] & \mathbb{Z} \arrow[u, "\Phi"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

4.4 Bemerkung. Wir haben in der Definition benutzt, dass jeder Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ die Multiplikation mit einer eindeutig bestimmten ganzen Zahl ist.

4.5 Proposition. *Sind $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ Abbildungen und $f \simeq g$, so ist* $\deg f = \deg g$.

Beweis. Sei $H\colon \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$ eine Homotopie von f nach g. Wir betrachten $\bar{H}\colon \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$, $\bar{H}(z,t) := H(z,t)/H(1,t)$. Dann ist $\bar{H}(z,0) = f(z)/f(1) = \bar{f}(z)$, $\bar{H}(z,1) = g(z)/g(1) = \bar{g}(z)$, und $\bar{H}(1,t) = 1$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$, $t \in I$. Also ist $\bar{f} \simeq \bar{g}\colon (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ und damit $\bar{f}_\# = \bar{g}_\#$, also $\deg f = \deg g$. □

4.6 Proposition. *Für $k \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ist der Grad der Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto az^k \end{aligned}$$

gleich k.

Beweis. Sei f die Abbildung $f(z) = az^k$. Dann ist $\bar{f}(z) = f(z)/f(1) = z^k$. Sei $l \in \mathbb{Z}$. Der Weg u_l, der in der Definition von Φ vorkam, war gerade durch $u_l(r) = \exp(2\pi i \cdot lr)$ gegeben, auch wenn wir es dort anders formuliert haben. Dann ist $\bar{f}(u_l(r)) = \exp(2\pi i \cdot lr)^k = \exp(2\pi i \cdot klr) = u_{kl}(r)$, also $\bar{f}_\#(\Phi(l)) = \bar{f}_\#([u_l]) = [\bar{f} \circ u_l] = [u_{kl}] = \Phi(kl)$, also, da l beliebig war ($l = 1$ hätte natürlich genügt), $\deg f = k$. $\square$

4.7 Proposition (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein komplexes Polynom vom Grad n, also $a_n \neq 0$. Hat p keine Nullstelle, so ist $n = 0$.*

Zum Beweis halten wir ein Polynom p vom Grad n wie in der Formulierung des Satzes fest und definieren für reelles $r \geq 0$, so dass p keine Nullstelle vom Betrag r hat,

$$\begin{aligned} f_r \colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1, \\ z &\mapsto \frac{p(rz)}{|p(rz)|}. \end{aligned}$$

4.8 Lemma. *Ist $p(0) \neq 0$, so ist $\deg f_0 = 0$.*

Beweis. $f_0(z) = \frac{p(0)}{|p(0)|} = \frac{p(0)}{|p(0)|} z^0$. $\square$

4.9 Lemma. *Es sei $0 \leq r_0 \leq r_1$. Hat p keine Nullstelle auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \colon r_0 \leq |z| \leq r_1\}$, so ist $\deg f_{r_0} = \deg f_{r_1}$.*

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times I &\to \mathbb{S}^1, \\ (z, t) &\mapsto \frac{p((r_0 + t(r_1 - r_0))z)}{|p((r_0 + t(r_1 - r_0))z)|} \end{aligned}$$

ist eine Homotopie von f_{r_0} nach f_{r_1}. $\square$

4.10 Lemma. *Es sei $0 < r$. Hat p keine Nullstelle auf dem unbeschränkten Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \colon r \leq |z|\}$, so ist $\deg f_r = n$.*

Beweis. Die Idee ist, das vorherige Lemma damit zu kombinieren, dass sich f_r für große r in etwa wie $z \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} z^n$ verhält.

Wir definieren

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{S}^1 \times I &\to \mathbb{S}^1, \\ (z,t) &\mapsto \frac{\sum_{k=0}^n a_k r^k t^{n-k} z^k}{|\sum_{k=0}^n a_k r^k t^{n-k} z^k|}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich der Zähler für $t \neq 0$ als $t^n \cdot f_{r/t}(z)$ schreiben lässt. Daher ist der Nenner in diesem Fall nie Null, und insbesondere ist $H(z,1) = f_r(z)$. Außerdem ist $H(z,0) = a_n/|a_n| \cdot z^n$. Es ist also $\deg f_r = \deg H(\bullet, 0) = n$. □

Beweis des Fundamentalsatzes. Hat p gar keine Nullstelle, so liefern die drei Lemmata die drei Gleichungen $0 = \deg f_0 = \deg f_1 = n$. □

4.11 Bemerkung. Man kann diesen Beweis auch für reelle Polynome durchführen. Man erhält dann Abbildungen $f_r\colon \mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^0$ und dass die Abbildung $\mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^0$, $x \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} x^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Da $\mathrm{id}_{\mathbb{S}_0}$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist (Zwischenwertsatz!), folgt, dass n gerade (also nicht unbedingt 0, aber kongruent 0 modulo 2) ist. Aber der Beweis, dass aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass ein reelles Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat, lässt sich wohl auch einfacher formulieren.

Weitere Eigenschaften der Fundamentalgruppe

Der Einfluss des Basispunktes

Da I (der Urbildraum von Wegen) und $I \times I$ (der Urbildraum von Homotopien von Wegen) wegzusammenhängend sind, ‚sieht' $\pi_1(X, x_0)$ nur die Wegkomponente von X, in der x_0 liegt. Liegen allerdings x_0 und x_1 in der selben Wegkomponente, so werden wir nun sehen, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph sind.

4.12 Definition. Sei X ein Raum und $p\colon I \to X$ stetig, $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} h_p\colon \pi_1(X, x_1) &\to \pi_1(X, x_0) \\ [w] &\mapsto [p * w * p^-]. \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 3.3 (und Proposition 3.4).

4.13 Proposition. *Sei X ein Raum, $p, p', q\colon I \to X$ stetig, $p(1) = q(0)$, $x_0 \in X$. Dann gilt:*

(i) h_p ist ein Homomorphismus.

(ii) Ist $p \simeq p'$ rel $\{0,1\}$, so ist $h_p = h_{p'}$.

(iii) *Es ist* $h_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(iv) *Es ist* $h_{p*q} = h_p \circ h_q$.

(v) *Ist* p *eine Schleife bei* x_0 *und* $\gamma := [p] \in \pi_1(X, x_0)$, *so ist* $h_p \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *der innere Automorphismus* $h_p(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

Beweis. Das sind alles einfache Folgerungen aus Proposition 3.4. □

4.14 Proposition. *Sei* X *ein Raum,* $x_0, x_1 \in X$. *Liegen* x_0, x_1 *in der selben Wegkomponente von* X, *so ist* $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, *denn für jeden stetigen Weg* $p \colon I \to X$ *mit* $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$ *ist*

$$h_p \colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus. Sind p, q *zwei solche Wege, so ist* $q * p^-$ *eine Schleife bei* x_0 *und mit* $\alpha := [q * p^-] \in \pi_1(X, x_0)$ *ist*

$$h_q(\beta) = \alpha h_p(\beta)\alpha^{-1} \qquad \text{für alle } \beta \in \pi_1(X, x_0),$$

h_p *und* h_q *unterscheiden sich also um einen inneren Automorphismus von* $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Ist p ein stetiger Weg von x_0 nach x_1, so ist $h_p \circ h_{p^-} = h_{p*p^-} = h_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und ebenso $h_{p^-} \circ h_p = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}$. Damit ist h_p ein Isomorphismus.

Ist q ein weiterer stetiger Weg von x_0 nach x_1, so ist $h_q = h_{q*p^-*p} = h_{q*p^-} \circ h_p$. □

Ist X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, x_0)$ abelsch, so hängt h_p nicht von p ab und wir können $\pi_1(X)$ als unabhängig vom Basispunkt betrachten. So ist es im Nachhinein auch nicht verwunderlich, dass wir bei der Diskussion des Grades einer Abbildung $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ nicht verlangen mussten, dass Abbildungen oder Homotopien (siehe auch Proposition 4.19) den Basispunkt erhalten. Im allgemeinen ist mehr Vorsicht nötig.

Homotopieäquivalenz

Homotopie von Abbildungen führt uns zu einer Äquivalenzrelation auf Räumen, die schwächer als Homöomorphie ist. Eine Variante dieses Konzepts für punktierte Räume ist uns bereits in Proposition 3.9 begegnet.

4.15 Definition. Seien X, Y Räume. Eine *Homotopieäquivalenz* zwischen X und Y ist eine stetige Abbildung $f \colon X \to Y$, so dass eine stetige Abbildung $g \colon Y \to X$ mit

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

existiert. In dieser Situation nennen wir g *homotopieinvers* zu f. Wir sagen, X und Y seien *homotopieäquivalent*, und schreiben $X \simeq Y$, wenn zwischen ihnen eine Homotopieäquivalenz existiert.

4.16 Proposition. *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien X, Y, Z Räume. $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ zeigt $X \simeq X$ und damit die Reflexivität. Symmetrie ergibt sich sofort aus der Definition. Seien nun $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen f' und g'. Dann ist

$$(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ g) \circ f \simeq f' \circ \mathrm{id}_Y \circ f = f' \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

und ebenso

$$(g \circ f) \circ (f' \circ g') \simeq \mathrm{id}_Z,$$

also $g \circ f\colon X \to Z$ eine Homotopieäquivalenz. Das zeigt die Transitivität. □

4.17 Beispiel. Sei $i\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusionsabbildung. Wir haben in Beispiel 1.3 eine Abbildung $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ angegeben, die homtopieinvers zu i ist. Es ist also $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Eine einfache Umformulierung ist:

4.18 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann ist X genau dann zusammenziehbar, wenn X homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum ist.* □

Freie Homotopie und die Fundamentalgruppe

Wir werden nun untersuchen, was man über die von homotopen Abbildungen induzierten Homomorphismen sagen kann, wenn die Homotopien den Basispunkt bewegen dürfen.

4.19 Proposition. *Seien X, Y Räume, $x_0 \in X$, $f, g\colon X \to Y$ stetig und $f \simeq g$. Ist $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie zwischen f und g, $H(\bullet, 0) = f$, $H(\bullet, 1) = g$, und $p\colon I \to Y$ der Weg $H(x_0, \bullet)$ in Y, $y_0 := p(0)$, $y_1 := p(1)$, so ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "g_\#"] \arrow[dr, "f_\#"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, "h_p", "\cong"'] \\
& \pi_1(Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Ist insbesondere eine der beiden Abbildungen $f_\#$, $g_\#$ ein Isomorphismus, so auch die andere.

Beweis. Wir definieren die Wege $l, r, o, u\colon I \to I \times I$, $l(s) = (0, s)$, $r(s) = (1, s)$, $o(s) = (s, 1)$, $u(s) = (s, 0)$. Da $I \times I$ konvex ist, ist $u \simeq l * o * r^- \text{ rel } \{0, 1\}$.

Ist nun w eine Schleife bei x_0 und $G := H \circ (w \times \mathrm{id}_I)$, so ist $G \circ l = p = G \circ r$, $G \circ u = f \circ w$, $G \circ o = g \circ w$ und daher $f \circ w \simeq p * (g \circ w) * p^- \text{ rel } \{0, 1\}$, also $f_\#([w]) = h_p(g_\#([w]))$. □

Wir können nun eine stärkere Form von Proposition 3.9 beweisen. Der Spezialfall $X = \{x_0\}$ ist Korollar 3.13.

4.20 Proposition. *Seien X, Y Räume, $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist für $x_0 \in X$ die Abbildung*

$$f_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g\colon Y \to X$ eine Homotopieinverse. Wir betrachten

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_\#} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))),$$

wobei die erste und dritte Abbildung natürlich verschieden sind, obwohl sie gleich bezeichnet sind. Da $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $(\mathrm{id}_X)_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus, nämlich die Identität, ist, ist nach der vorherigen Proposition auch $(g \circ f)_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ ein Isomorphismus. Also ist die Komposition der ersten beiden Abbildungen unseres Diagrammes ein Isomorphismus. Ebenso folgt aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, dass die Komposition der letzten beiden Abbildungen ein Isomorphismus ist. Damit ist die mittlere Abbildung sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus. Daher müssen auch die anderen beiden Abbildungen Isomorphismen sein, insbesondere die erste. □

[Bre93] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*, Bd. 139 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1993.