Abschnitt 5

Beispiele von Überlagerungen

Einfache Beispiele von Überlagerungen

Projektive Räume

5.1 Proposition. *Die sich aus der Definition von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ergebende Quotientenabbildung $p\colon S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung.*

Beweis. Zur Übung. □

Wir betrachten nun für $n \geq 1$ in $\mathbb{S}^n$ den Weg

$$\begin{aligned} v\colon I &\to \mathbb{S}^n \\ s &\mapsto (\cos(\pi s), \sin(\pi s), 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

von $x_0 := (1, 0, \ldots, 0)$ nach $-x_0$. Wir setzen $y_0 := p(x_0) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Da $p(-x) = p(x)$, ist $p \circ v$ eine Schleife bei y_0, und wir benennen $\alpha := [p \circ v] \in \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, y_0)$.

5.2 Proposition. *Es ist $\alpha \neq e$.*

Beweis. Wäre $p \circ v \simeq c_{y_0}$ rel $\{0, 1\}$, so wäre nach Korollar 3.20 $v(1) = c_{x_0}(1) = x_0$, da $c_{x0}(0) = x_0 = v(0)$ und $p \circ c_{x_0} = c_{y_0}$. □

Nun bemerken wir ein Phänomen, das vielleicht unerwartet ist.

5.3 Proposition. *Ist $n \geq 2$, so ist $\alpha^2 = e$.*

Beweis. Es sei $a\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die Antipodenabbildung $a(x) = -x$ (man beachte $p \circ a = p$). Es ist $u := v * (a \circ v)$ eine geschlossene Schleife bei x_0, die in $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^n$ verläuft, und $p \circ u = (p \circ v) * (p \circ v)$, also $p_\#([u]) = \alpha^2$. Das Element α^2 ist daher im Bild der Komposition

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \xrightarrow{\text{Inkl.}_\#} \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, y_0).$$

Für $n \geq 2$ bezeichnet aber der erste Fall den konstanten Homomorphismus, denn in diesem Fall $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^n_+$ mit $\mathbb{D}^n_+ = \{x \in \mathbb{S}^n\colon x_{n+1} \geq 0\}$ und $\mathbb{D}^n_+$ ist zusammenziehbar. □

Offenbar ist für $n \geq 2$ also $\{e, \alpha\}$ eine Untergruppe von $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$. Ist dies bereits die ganze Gruppe? Dies werden wir nicht beantworten können, ohne auch etwas über die Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^n$ zu erfahren, wie folgende Proposition zeigt.

5.4 Proposition. *Es sei $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $y_0 = p(x_0)$. Dann ist $p_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Monomorphismus.*

Beweis. Es sei $[w] \in \pi_1(X, x_0)$. Ist $e = p_\#([w]) = [p \circ w]$, so ist nach dem Homotopiehochhebungslemma Proposition 3.19 bereits $[w] = e$. □

In der Tat hat $\mathbb{S}^n$ aber nichts zur Fundamentalgruppe beizutragen.

5.5 Proposition. *Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend.*

Da wir dieses Resultat später erneut erhalten werden, begnügen wir uns mit einer

Beweisskizze. Wir bemerken zunächst, dass wir für einen Weg $w\colon I \to \mathbb{S}^n$, der ganz in einer offenen Hemisphäre verläuft, leicht eine Homotopie relativ zu den Endpunkten zu einem Weg, der auf einem Großkreis verläuft, angeben können, nämlich

$$\begin{aligned} H\colon I \times I &\to \mathbb{S}^n \\ (s,t) &\mapsto \frac{(1-t)w(s) + t(w(0) + s(w(1) - w(0)))}{\|(1-t)w(t) + t(w(0) + s(w(1) - w(0)))\|}. \end{aligned}$$

In der Tat gilt, wenn $\Lambda\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional ist, so dass $\Lambda(w(s)) > 0$ für alle $s \in I$, auch $\Lambda((1-t)w(s) + t(w(0) + s(w(1) - w(0))) > 0$ für alle $s, t \in I$. Ein solcher Weg $H(\bullet, 1)$ hat aber für $n \geq 2$ ein Bild in $\mathbb{S}^n$, das leeres Inneres hat.

Ist nun w eine beliebige Schleife in $\mathbb{S}^n$, so sichert das Lebesgue-Lemma die Existenz eines $N > 0$, so dass $w\left[\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right]$ für jedes k in einer offenen Hemisphäre verläuft, w ist damit relativ zu den Endpunkten homotop zu einer Schleife, die abschnittsweise auf Großkreisen verläuft, deren Bild also eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren ist. Damit ist das Bild von w selber abgeschlossen und mit leerem Inneren. Insbesondere ist w nicht surjektiv. Ist nun aber $y \in \mathbb{S}^n \setminus \operatorname{im} w$, so ist, da $\mathbb{S}^n \setminus \{y\} \approx \mathbb{R}^n$ zusammenziehbar ist, die Schleife w relativ $\{0, 1\}$ homotop zur konstanten Schleife, also $[w] = e \in \pi_1(\mathbb{S}^n)$. □

Das genügt nun aber schon.

5.6 Proposition. *Für $n \geq 2$ ist $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, y_0) = \{e, \alpha\}$.*

Wir schicken ein Lemma voraus, dass wir schon früher hätten formulieren sollen.

5.7 Lemma. *Sind* $u, w\colon I \to X$ *mit* $u(0) = w(0) = x_0$ *und* $u(1) = w(1) = x_1$, *so ist* $u \simeq w \operatorname{rel} \{0,1\}$ *genau dann, wenn* $u * w^- \simeq c_{x_0} \operatorname{rel} \{0,1\}$.

Beweis. Ist $u \simeq w$, so ist $u * w^- \simeq w * w^- \simeq c_{x_0}$. Ist $u * w^- \simeq c_{x_0}$, so ist $u \simeq u * c_{x_1} \simeq u * (w^- * w) \simeq (u * w^-) * w \simeq c_{x_0} * w \simeq w$. □

Beweis von Proposition 5.6. Es sei w eine Schleife bei y_0. Es existiert eine Hochhebung $\tilde{w}$ von w mit $\tilde{w}(0) = x_0$. Es ist $\tilde{w}(1) \in \{x_0, -x_0\}$. Ist $\tilde{w}(1) = x_0$, so folgt wegen $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = \{e\}$, dass $\tilde{w} \simeq c_{x_0}$, also $w \simeq c_{y_0}$, $[w] = e$. Ist $\tilde{w}(1) = -x_0$, so ist aus gleichem Grund und mit Lemma 5.7 $\tilde{w} \simeq v$, also $w \simeq p \circ v$, $[w] = \alpha$. □

Die Kleinsche Flasche

Das nächste Beispiel beginnen wir mit einer Gruppe, nämlich einer Untergruppe der Homoömorphismen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Dazu definieren wir die zwei affin linearen Isometrien

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 & \qquad g\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+1, -y) & (x,y) &\mapsto (x, y+1). \end{aligned}$$

Es sei G die von f und g erzeugte Gruppe. Wir wollen zunächst G direkter beschreiben. Dazu berechnen wir

$$(fgf^{-1})(x,y) = (fg)(x-1,-y) = f(x-1,-y+1) = (x,y-1) = g^{-1}(x,y),$$

also $fgf^{-1} = g^{-1}$. Da $g \neq g^{-1}$ können wir also schon einmal festhalten, dass G nicht abelsch ist. Wir erhalten aus dieser Gleichung

$$g^{-1}f = fg, \qquad g^{-1}f^{-1} = f^{-1}g, \qquad gf = fg^{-1}, \qquad gf^{-1} = f^{-1}g^{-1}$$

und per Induktion

$$g^n f^m = f^m g^{(-1)^m n}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

und daraus

$$G = \{f^m g^n \colon m, n \in \mathbb{Z}\}, \qquad (f^{m_1} g^{n_1})(f^{m_2} g^{n_2}) = f^{m_1+m_2} g^{(-1)^{m_2} n_1 + n_2}.$$

Außerdem ist

$$f^m g^n(0,0) = (m, (-1)^m n)$$

und damit

$$f^{m_1} g^{n_1} = f^{m_1} g^{n_1} \iff (m_1, n_1) = (m_2, n_2).$$

Betrachten wir nun das von $(0,1)$ und $(1,0)$ aufgespannte Gitter in $\mathbb{R}^2$, so stellen wir fest, dass jedes Element aus G Gitterpunkte auf Gitterpunkte, horizontale Gitterkanten auf horizontale Gitterkanten, vertikale Gitterkanten auf vertikale Gitterkanten und Gitterquadrate auf Gitterquadrate abbildet. Mehr noch: gegeben zwei Gitterpunkte gibt es genau ein Element aus G, das den ersten auf den zweiten abbildet, und ebenso für die drei anderen Arten von Objekten.

Daraus ergibt sich folgendes.

5.8 Proposition. *Ist $x \in \mathbb{R}^2$, so existiert eine Umgebung U von x, so dass für alle $\phi, \psi \in G$, $\phi \neq \psi$ gilt, dass $\phi[U] \cap \psi[U] = \emptyset$.*

Es sei nun K der *Orbitraum* von G, also

$$K := \left\{ Gx \colon x \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{R}^2/\sim$$

mit der Quotiententopologie, wobei $Gx = \{\phi(x) \colon \phi \in G\}$ und $x \sim y \iff y \in Gx$. Es sei $p \colon \mathbb{R}^2 \to K$ die Quotientenabbildung.

5.9 Proposition. *Die Abbildung $p \colon \mathbb{R}^2 \to K$ ist eine Überlagerung.*

Beweis. Dies ergibt sich mit wenig Aufwand aus Proposition 5.8, wir werden das Argument später ausführen. □

5.10 Proposition. *Die Abbildung*

$$I \times I \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} K$$

induziert einen Homöomorphismus

$$(I \times I)/\sim \approx K,$$

wobei $\sim$ von $(x, 0) \sim (x, 1)$ und $(0, y) \sim (0, 1 - y)$ erzeugt wird.

Beweis. Da jedes der Gitterquadrate Bild des Gitterquadrates $I \times I$ unter einem Element von G ist, ist die Abbildung $I \times I \to K$ surjektiv. Da K hausdorffsch ist (das ist Teil der vorherigen Proposition) und $I \times I$ kompakt, ist die Abbildung eine Quotientenabbildung. Es ist nun also nur noch zu untersuchen, welche Punkte von ihr identifiziert werden, welche also durch ein Element aus G aufeinander abgebildet werden. Man überprüft leicht, dass dies genau in den angegebenen Fällen passiert. □

Der Raum K heißt die *Kleinsche Flasche.*

Wir setzen nun $x_0 := (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $y_0 := p(x_0) \in K$.

5.11 Proposition. *Es sei $\alpha \in \pi_1(K, y_0)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $D_\alpha \in G$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\alpha = [w]$ und $\tilde{w}$ eine Hochhebung von w mit $\tilde{w}(0) = x_0$, so ist $\tilde{w}(1) = D_\alpha(x_0)$.*

Beweis. Die Hochhebung $\tilde{w}$ existiert nach Proposition 3.17, nach Korollar 3.20 hängt $\tilde{w}(1)$ nur von α ab. Es ist $p(\tilde{w}(1)) = y_0 = p(x_0)$, nach Definiton existiert also ein $\phi \in G$ mit $\phi(x_0) = \tilde{w}(1)$. Die Eindeutigkeit haben wir bereits zuvor festgestellt. □

5.12 Proposition. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \pi_1(K, y_0) &\to G \\ \alpha &\mapsto D_\alpha \end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Ist $\phi \in G$, so existiert ein Weg $\tilde{w}$ von x_0 nach $\phi(x_0)$. Es ist dann $p \circ \tilde{w}$ eine Schleife bei y_0 und $D_{[w]} = \phi$. Das zeigt die Surjektivität.

Es seinen nun $\alpha, \beta \in \pi_1(K, y_0)$ und $\alpha = [w_1]$, $\beta = [w_2]$ mit Hochhebungen $\tilde{w}_i$, $\tilde{w}_i(0) = x_0$.

Ist $D_\alpha = D_\beta$, so ist $\tilde{w}_1(1) = \tilde{w}_2(1)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist also $\tilde{w}_1 \simeq \tilde{w}_2$ und damit $\alpha = [p \circ \tilde{w}_1] = [p \circ \tilde{w}_2] = \beta$. Dies zeigt die Injektivität.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung ein Homomorphismius ist. Es ist $p \circ D_\alpha \circ \tilde{w}_2 = p \circ \tilde{w}_2 = w_2$, $(D_\alpha \circ \tilde{w}_2)(0) = D_\alpha(x_0) = \tilde{w}_1(1)$, also ist $\tilde{w}_1 * (D_\alpha \circ \tilde{w}_2)$ ein Weg von x_0 nach $D_\alpha(\tilde{w}_2(1)) = D_\alpha(D_\beta(x_0)) = (D_\alpha \circ D_\beta)(x_0)$. Da $p \circ (\tilde{w}_1 * (D_\alpha \circ \tilde{w}_2)) = w_1 * w_2$, ist $D_\alpha \circ D_\beta = D_{[w_1 * w_2]} = D_{\alpha\beta}$. □

Konkret können wir nun beispielsweise

$$\begin{aligned} w_1, w_2 \colon I &\to \mathbb{R}^2 \\ w_1(s) &= (s, 0) \\ w_2(s) &= (0, s) \end{aligned}$$

setzen. Dann ist $w_1(0) = w_2(0) = (0,0) = x_0$ und $w_1(1) = (1,0) = f(x_0)$, $w_2(1) = (0,1) = g(x_0)$. Mit

$$\alpha, \beta \in \pi_1(K, y_0) \qquad \alpha := [p \circ w_1] \qquad \beta := [p \circ w_2]$$

ist also $f = D_\alpha$, $g = D_\beta$. Damit ist $\pi_1(K, y_0)$ von α und β erzeugt, es ist $\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta^{-1}$, und dies ist in dem Sinne die einzige Relation, dass daraus folgt, dass sich jedes Element der Fundamentalgruppe als $\alpha^m \beta^n$ schreiben lässt, diese Elemente aber alle verschieden sind.

Diese Notation werden wir auch später für die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche verwenden.