Abschnitt 6

Mehr Beispiele von Überlagerungen

Die Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser einer Überlagerung

Wir führen ein Konzept, das wir im vorherigen Abschnitt implizit benutzt haben, systematisch ein.

Es sei $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung. In Y sei der Basispunkt y_0 gwählt. Das Urbild $F := p^{-1}[\{y_0\}]$ nennen wir die *Faser über* y_0. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon F \times \pi_1(Y, y_0) &\to F \\ (x, \alpha) &\mapsto \tilde{w}(1), \qquad \text{mit } \tilde{w}(0) = x,\ [p \circ \tilde{w}] = \alpha. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\varphi(x, \alpha)$ also als Endpunkt der Hochhebung eines α repräsentierenden geschlossenen Weges zu einem Weg mit Anfangspunkt x. Die Wohldefiniertheit dieser Konstruktion folgt aus Proposition 3.17 und Korollar 3.20.

6.1 Proposition. *Die Funktion φ definiert eine* Rechtsoperation *von $\pi_1(Y, y_0)$ auf F. Das heißt, dass für alle $x \in F$ und $\alpha, \beta \in \pi_1(Y, y_0)$*

(i) $\varphi(x, e) = x$ *und*

(ii) $\varphi(\varphi(x, \alpha), \beta) = \varphi(x, \alpha\beta)$.

gilt.

Beweis. Zu (i). Wähle $\tilde{w} := c_x$.

Zu (ii). Es seien $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\colon I \to X$ mit $[p \circ \tilde{w}_1] = \alpha$, $[p \circ \tilde{w}_2] = \beta$, $\tilde{w}_1(0) = x$, $\tilde{w}_2(0) = \varphi(x, \alpha)$. Dann ist $\tilde{w}_1(1) = \varphi(x, \alpha) = \tilde{w}_2(0)$, also ist $\tilde{w}_1 * \tilde{w}_2$ definiert und $[p \circ (\tilde{w}_1 * \tilde{w}_2)] = \alpha\beta$, also $\varphi(x, \alpha\beta) = (\tilde{w}_1 * \tilde{w}_2)(1) = \tilde{w}_2(1) = \varphi(\varphi(x, \alpha), \beta)$. □

Das nehmen wir als Rechtfertigung ab sofort statt $\varphi(x, \alpha)$ einfacher $x\alpha$ zu schreiben. Man beachte, dass (ii) dadurch zu $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$ wird.

6.2 Proposition. *Diese Operation ist* transitiv*, das heißt, zu* $x_1, x_2 \in F$ *existiert immer ein* $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ *mit* $x_1\alpha = x_2$*.*

Beweis. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\tilde{w}$ von x_1 nach x_2. Dann ist $p \circ \tilde{w}$ eine Schleife bei y_0 und mit $\alpha = [p \circ w]$ ist $x_1\alpha = x_2$. $\square$

6.3 Proposition. *Es sei* $x \in F$*. Dann ist*

$$\{\alpha \in \pi_1(Y, y_0) \colon x\alpha = x\} = \operatorname{im}\left(\pi_1(X, x) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(Y, y_0)\right),$$

die Standgruppe von x*.*

Beweis. Ist $x\alpha = x$, so existiert also ein Weg $\tilde{w}$ von x nach x, mit $[p \circ w] = \alpha$. Da $\tilde{w}$ ein geschlossener Weg ist, repräsentiert er ein Element aus $\pi_1(X, x)$ und $\alpha = [p \circ w] = p_\#([w])$.

Ist $\beta = [u] \in \pi_1(X, x)$, so ist $x \cdot p_\#([u]) = x \cdot [p \circ u] = u(1) = x$. $\square$

Man beachte die Abhängigkeit von x. In der Tat erhalten wir algebraisch $(x\beta)\alpha = x\beta \iff x(\beta\alpha\beta^{-1}) = x$ und damit $\alpha \in p_\#\pi_1(X, x\beta) \iff \beta\alpha\beta^{-1} \in p_\#\pi_1(X, x)$, das heißt $p_\#\pi_1(X, x\beta) = \beta^{-1}(p_\#\pi_1(X, x))\beta$. Selbiges ergibt sich aus Proposition 4.14.

Wir erinnern daran, dass wir in Proposition 5.4 festgestellt haben, dass $p_\#$ injektiv ist.

6.4 Beispiel. Wir betrachten $X := (I \times \mathbb{R})/{\sim}$, wobei $\sim$ die von $(0, y) \sim (1, -y)$ erzeugte Äquivalenzrelation sei. X ist also ein unendlich breites Möbiusband. Nehmen wir die Bezeichnungen aus unserer Diskussion der Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche wieder auf, so ist $(1, -y) = f(0, y)$. Daher induziert die Inklusion $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung $q \colon X \to \mathbb{R}^2/G = K$. Man sieht leicht, dass dies eine Überlagerung ist. Setzen wir $x_k := [(0, k)] = [(1, -k)] \in X$, so ist $F := q^{-1}[\{y_0\}] = \{x_k \colon k \in \mathbb{Z}\}$. Wir sehen $x_k\alpha = x_{-k}$, $x_k\beta = x_{k+1}$, also $x_k\alpha^m\beta^n = x_{(-1)^m k+n}$. Damit ist die Standgruppe von x_0 gleich $\{\alpha^m \colon m \in \mathbb{Z}\}$. Weiterhin folgt, dass $\pi_1(X, x_0)$ eine unendliche zyklische Gruppe ist, die von einem Urbild von α unter $p_\#$ erzeugt wird. Dieser Erzeuger wird von einer Schleife in X repräsentiert, die Bild eines Weges in $I \times \mathbb{R}$ von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ ist. Letzeres kann man unabhängig von dieser Überlegung erhalten, indem man zeigt, dass die Abbildung $\mathbb{S}^1 \approx I/\{0, 1\} \approx (I \times \{0\})/\{(0, 0), (1, 0)\} \to (I \times \mathbb{R})/{\sim} = X$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Allgemeiner sieht man, dass die Standgruppe von x_{k_0} aus den Elementen $\alpha^m\beta^n$ mit $n = 0$ für gerades m und $n = 2k_0$ für ungerades m besteht. Das sieht zunächst verwirrend aus, aber diese Elemente lassen sich als $\alpha^m\beta^{k_0-(-1)^m k_0} = \beta^{-k_0}\alpha^m\beta^{k_0}$ schreiben, was wegen $x_{k_0} = x_0\beta^{k_0}$ zu unseren Ergebnissen von oben passt.

Abbildung 6.1: Die Überlagerung der Kleinschen Flasche aus Beispiel 6.4.

Abbildung 6.2: Die Überlagerung der Kleinschen Flasche aus Beispiel 6.5.

6.5 Beispiel. Ähnlich wie eben setzen wir $X := \mathbb{R} \times I/{\sim}$, wobei $\sim$ von $(x, 0) \sim (x, 1)$ erzeugt wird. X ist also homöomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Dies liefert ebenso eine Überlagerung $q\colon X \to K$ der Kleinschen Flasche, und die Faser ist $q^{-1}[\{y_0\}] = \{x_k\colon k \in \mathbb{Z}\}$ mit $x_k := [(k, 0)] = [(k, 1)]$. Wir sehen $x_k\alpha = x_{k+1}$ und $x_k\beta = x_k$. Für beliebiges $k_0 \in \mathbb{Z}$ ist die Standgruppe von x_{k_0} also $\{\beta^n\colon n \in \mathbb{Z}\}$. In diesem Fall ist die Standgruppe also für alle Punkte der Faser gleich. In der Tat liefert uns die Überlegung von oben, dass, wenn $\{\beta^n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ die Standgruppe von x_0 ist, die Standgruppe von $x_{k_0} = x_0\alpha^{k_0}$ gleich $\alpha^{-k_0}\{\beta^n\colon n \in \mathbb{Z}\}\alpha^{k_0}$ sein muss. Aber $\alpha^{-k_0}\beta^n\alpha^{k_0} = \alpha^{-k_0}\alpha^{k_0}\beta^{(-1)^{k_0}n} = \beta^{(-1)^{k_0}n}$ und $\left\{\beta^{(-1)^{k_0}n}\colon n \in \mathbb{Z}\right\} = \{\beta^n\colon n \in \mathbb{Z}\}$. In diesem Fall ist also die Untergruppe $p_\#[\pi_1(X, x_0)]$ von $\pi_1(K, y_0)$ ein Normalteiler und daher allen $p_\#[\pi(X, x_k)]$ gleich.

6.6 Proposition. *Es sei $x_0 \in F$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} p_\#\pi_1(X, x_0)\backslash\pi_1(Y, y_0) &\to F \\ (p_\#\pi_1(X, x_0))\alpha &\mapsto x_0\alpha \end{aligned}$$

von den Rechtsnebenklassen von $p_\#\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(Y, y_0)$ auf die Faser wohldefiniert und eine Bijektion. Insbesondere ist, wenn X einfach zusammenhängend ist, die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(Y, y_0) &\to F \\ \alpha &\mapsto x_0\alpha \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Beweis. Wir setzen $G := \pi_1(Y, y_0)$, $H := p_\#\pi_1(X, x_0)$.

Ist $H\alpha = H\beta$, so ist $\alpha\beta^{-1} \in H$, also $x_0\beta = (x_0\alpha\beta^{-1})\beta = x_0\alpha$. Damit ist die Abbildung wohldefiniert.

Ist andererseits $x_0\alpha = x_0\beta$, so ist $x_0\alpha\beta^{-1} = x_0$ und damit $\alpha\beta^{-1} \in H$, also $H\beta = (H\alpha\beta^{-1})\beta) = H\alpha$. Dies zeigt die Injektivität.

Die Surjektivität folgt aus der Transitivität der Gruppenoperation. □

$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

Es sei $Y := \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x - (1, 0)\| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x - (-1, 0)\| = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ die Vereinigung zweier Kreislinien, die sich in einem Punkt treffen.

Abbildung 6.3: $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ als Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$

Abbildung 6.4: $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$.

6.7 Proposition. *Die Inklusion* $i\colon Y \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ *ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Eine Homotopieinverse (in der Tat eine starke Deformationsrektraktion) r ist in Abbildung 6.3 angedeutet. □

Wir definieren zwei Einbettungen $i^1, i^2\colon \mathbb{S}^1 \to Y$.

$$i^1(x) = (1,0) - x, \qquad i^2(x) = x - (-1,0).$$

Wir schreiben auch $Y = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, und denken uns diesen Raum dann immer zusammen mit den beiden Abbildungen i^1 und i^2.

Es sei $g = \Phi(1) \in \pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))$ der Standarderzeuger. Wir setzen

$$\alpha = i^1_\#(g), \qquad \beta = i^2_\#(g).$$

Die Fundamentalgruppe des Raumes $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ wird uns noch näher beschäftigen. Später werden wir zeigen, dass sie von α und β erzeugt wird und zwischen α und β keine Relation besteht (das wird noch zu erklären sein). Vorläufig wollen wir zeigen, dass α und β nicht kommutieren. Dazu benutzen wir eine geeignete Überlagerung.

Abbildung 6.5 zeigt einen Raum X, den wir als Graphen mit sechs Ecken und zwölf Kanten beschreiben können. Wir bilden diesen nach $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ab, indem wir jede der Ecken auf den Basispunkt (den Schnittpunkt der beiden Kreislinien) abbilden und jede der Kanten auf eine der Kreislinien, wobei die Beschriftung angibt, auf welche und in welcher Richtung. Dabei soll das Innere jeder Kanten homöomorph auf das Komplement des Basispunkts in der entsprechenden Kreislinie abgebildet werden. Man überzeugt sich leicht davon, dies eine Überlagerungsabbildung ist. Die wesentliche Eigenschaft ist, dass in jeder Ecke des Graphen je genau eine mit α beziehungsweise β bezeichnete Kante startet und endet, was der Situation in $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ entspricht.

In dieser Überlagerung besteht die Faser des Basispunkts aus den sechs Ecken. Wir wählen einen dieser als Basispunkt $x_0 \in X$. Wir identifizieren nun leicht, siehe Abbildung 6.6, den Punkt $x_0\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ der Faser. Aus $x_0\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \neq x_0$ schließen wir $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \neq e$, also kommutieren α und β nicht. Natürlich können wir ebenso einfach direkt $x_0\alpha\beta \neq x_0\beta\alpha$ ablesen.

Abbildung 6.5: Eine Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Abbildung 6.6: $x_0 \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \neq x_0$.

Abbildung 6.7: Eine das nicht triviale Element $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}^{-1}$ repräsentierende Schleife in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.

6.8 Korollar. *In* $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}, (0,0))$ *ist* $\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}^{-1} \neq e$*, wobei* $\bar{\alpha} := (i \circ i^1)_\#(\alpha)$*,* $\bar{\beta} := (i \circ i^2)_\#(\beta)$.

Beweis. Der Homomorphismus

$$i_\# \colon \pi_1(X,(0,0)) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}, (0,0))$$

ist ein Isomorphismus, da i eine Homotopieäquivalenz ist. Insbesondere ist er injektiv. □

Man beachte, dass wir mit dieser einen Überlagerung nicht alles über $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ erfahren. Beispielsweise ist $x_0\alpha^2 = x_0$, obwohl $\alpha^2 \neq e$. (Wie kann man letzteres zeigen?). Dies liegt daran, dass α^2 im Bild von $\pi_1(X, x_0)$ liegt.