Abschnitt 7

Deckbewegungen und die Klassifikation von Überlagerungen

Wir beginnen mit einer wichtigen Hochhebungseigenschaft. Man mache sich klar, dass in der folgenden Proposition der Fall $Z = \mathbb{S}^1$ bereits direkt aus den Lemmata über Hochhebungen von Wegen und Homotopien von Wegen folgt, denn dieser Fall lässt sich zu der Frage umforlieren, wann sich ein geschlossener Weg zu einem geschlossenen Weg hochheben lässt. Den allgemeinen Fall werden wir ebenfalls darauf reduzieren.

7.1 Proposition. *Es sei $p\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Überlagerung, Z eine wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum, $z_0 \in Z$. Ist $f\colon (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

(ii) $\operatorname{im}\Big(\pi_1(Z, z_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, y_0)\Big) \subset \operatorname{im}\Big(\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_1(Y, y_0)\Big)$.

In diesem Fall ist die Abbildung $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. „*(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*“ Aus $p \circ \tilde{f} = f$ folgt $p_\# \circ \tilde{f}_\# = f_\#$ und damit $\operatorname{im} f_\# \subset \operatorname{im} p_\#$.

Zur Eindeutigkeit: Es sei $z \in Z$. Es existiert ein Weg $w\colon I \to Z$ von z_0 nach z. Dann ist $u := f \circ w$ ein Weg von y_0 nach $f(z)$ und nach Proposition 3.17 existiert eine eindeutige Hochhebung $\tilde{u}$ von u mit $\tilde{u}(0) = x_0$. Nun ist aber auch $\tilde{f} \circ w$ eine solche Hochhebung, denn $p \circ (\tilde{f} \circ w) = f \circ w$ und $(\tilde{f} \circ w)(0) = \tilde{f}(z_0) = x_0$. Damit ist $\tilde{f} \circ w = \tilde{u}$ und insbesondere $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(1)$.

„*(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*“ Der Absatz zur Eindeutigkeit zeigt bereits, wie $\tilde{f}$ zu definieren ist: Für $z \in Z$ wähle man einen Weg w von z_0 nach z, erhalte ein $\tilde{u}$ wie dort und setze $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(1)$. Es ist zu zeigen, dass diese Definition von der Wahl von w unabhängig und die so erhaltene Abbildung $\tilde{f}$ stetig ist.

Sind w_1 und w_2 Wege von z_0 nach z, so ist $w_1 * w_2^-$ ein geschlossener Weg bei z_0. Nach Voarusetzung ist $[f \circ (w_1 * w_2^-)] \in \operatorname{im} f_\# \subset \operatorname{im} p_\#$, so dass $f \circ (w_1 * w_2^-) = (f \circ w_1) * (f \circ w_2)^-$ eine Hochhebung zu einem geschlossenen

Weg bei x_0 besitzt. Dies heißt aber, dass die Hochhebungen von $f \circ w_1$ und $f \circ w_2$ mit Anfangspunkt x_0 den gleichen Endpunkt haben. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von $\tilde{f}$.

Es sei nun $z \in Z$. Es sei U eine gleichmäßig überdeckte Umgebung von $f(z)$ und V die Komponente von $p^{-1}[U]$, die $\tilde{f}(z) \in p^{-1}[f(z)]$ enthält. Da Z lokal wegzusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende, in $f^{-1}[U]$ enthaltene Umgebung W von z. Wir wählen eine solche und werden zeigen, dass $\tilde{f}|_W$ stetig ist. Es sei w ein Weg von z_0 nach z und $\tilde{u}$ eine Hochhebung von $f \circ w$ mit $\tilde{u}(0) = x_0$. Es ist also $\tilde{u}(1) = \tilde{f}(z)$. Ist nun $z' \in W$ und v ein Weg von z nach z' in W, so ist $f \circ v$ ein Weg von $f(z)$ nach $f(z')$ in U. Daher ist $\tilde{u} * ((p|_V)^{-1} \circ (f \circ v))$ eine stetige Hochhebung von $f \circ (w * v)$ und $\tilde{f}(z') = (\tilde{u} * ((p|_V)^{-1} \circ (f \circ v))(1) = (p|_V)^{-1}(f(z'))$. Es ist also $\tilde{f}|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$ stetig. □

Die Deckbewegungsgruppe

7.2 Definition. Es sei $p \colon X \to Y$ eine Überlagerung. Eine *Deckbewegung* ist ein Homöomorphismus $D \colon X \to X$, so dass $p \circ D = p$. Die Menge der Deckbewegungen von p bildet mit der Komposition eine Gruppe, die *Deckbewegungsgruppe*, die wir mit $\Delta(p)$ oder nur Δ bezeichnen.

Insbesondere bilden Deckbewegungen die Faser auf sich ab. Wir halten fest, wie sich diese Operation auf der Faser mit der früher eingeführten der Fundamentalgruppe des überlagerten Raumes verträgt.

7.3 Proposition. *Es sei $p \colon X \to Y$ eine Überlagerung, $y_0 \in Y$, $F = p^{-1}[\{y_0\}]$. Dann gilt*

$$D(x\alpha) = (Dx)\alpha$$

für $D \in \Delta(p)$, $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$, $x \in F$.

Beweis. Es sei $\alpha = [p \circ \tilde{w}]$ mit $\tilde{w} \colon I \to X$, $\tilde{w}(0) = x$. Dann ist ebenfalls $[p \circ (D \circ \tilde{w})] = [p \circ \tilde{w}] = \alpha$, $(D \circ \tilde{w})(0) = Dx$. Daher ist $D(x\alpha) = D(\tilde{w}(1)) = (D \circ \tilde{w})(1) = (Dx)\alpha$. □

7.4 Proposition. *Es sei $p \colon X \to Y$ eine Überlagerung und $x_0, x_1 \in X$, $p(x_0) = p(x_1)$. Dann existiert genau dann eine Deckbewegung D mit $D(x_0) = x_1$, wenn $p_\#[\pi_1(X, x_0)] = p_\#[\pi_1(X, x_1)]$.*

Beweis. Existiert ein solches $D \colon (X, x_0) \to (X, x_1)$ und wählen wir die genaueren Bezeichnungen $p^i \colon (X, x_i) \to (Y, y)$, $y = p(x_0) = p(x_1)$, so ist $p^1_\# \circ D_\# = p^0_\#$ und, da $D_\#$ ein Isomorphismus ist, $\operatorname{im} p^1_\# = \operatorname{im} p^0_\#$.

Es sei nun $\operatorname{im} p^1_\# = \operatorname{im} p^0_\#$. Aus $\operatorname{im} p^0_\# \subset \operatorname{im} p^1_\#$ folgt mit Proposition 7.1 die Existenz von $D \colon (X, x_0) \to (X, x_1)$ mit $p \circ D = p$. Aus $\operatorname{im} p^1_\# \subset \operatorname{im} p^9_\#$ folgt die Existenz von $D' \colon (X, x_1) \to (X, x_0)$ mit $p \circ D' = p$. Nun ist aber $D' \circ D$ eine Abbildung $(X, x_0) \to (X, x_0)$ mit $p \circ (D' \circ D) = p \circ D = p$ und aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 7.1 folgt $D' \circ D = \mathrm{id}_X$. Ebenso folgt $D \circ D' = \mathrm{id}_X$, also ist D ein Homöomorphismus und damit $D \in \Delta$. $\square$

7.5 Beispiel. Bei der Überlagerung der Kleinschen Flasche aus Beispiel 6.4 haben wir erhalten, dass $p_\#[\pi_1(X, x_k)] = \left\{\alpha^m \beta^{(1-(-1)^m)k} \colon m \in \mathbb{Z}\right\}$. Da diese Untergruppen paarweise verschieden sind, ist $\Delta = \{\mathrm{id}\}$.

7.6 Proposition und Definition. *Es sei $p\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Überlagerung, $F = p^{-1}[\{y_0\}]$. Dann sind äquivalent:*

(i) Die Deckbewegungsgruppe Δ operiert transitiv auf der Faser F, das heißt für alle $x_1, x_2 \in F$ existiert ein $D \in \Delta$ mit $Dx_1 = x_2$.

(ii) Die Untergruppe $p_\#[\pi_1(X, x_0)]$ von $\pi_1(Y, y_0)$ ist ein Normalteiler.

In diesem Fall heißt die Überlagerung regulär.

Beweis. Zunächst einmal genügt für die Transitivität auf der Faser, dass zu jedem $x_1 \in F$ ein $D \in \Delta$ mit $Dx_0 = x_1$ existiert. Dies ist nach Proposition 7.4 dazu äquivalent, dass $p_\#[\pi_1(X, x_0)] = p_\#[\pi_1(X, x_1)]$ für alle $x_1 \in F$. Nun lässt sich aber jedes $x_1 \in F$ als $x_0\alpha^{-1}$ mit $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ schreiben, und $p_\#[\pi_1(X, x_0\alpha^{-1})] = \alpha(p_\#[\pi_1(X, x_0)])\alpha^{-1}$. Also ist die Operation auf der Faser genau dann transitiv, wenn die Untergruppen $\alpha(p_\#[\pi_1(X, x_0)])\alpha^{-1}$ alle übereinstimmen, dies ist aber genau die Bedingung, dass $p_\#[\pi_1(X, x_0)]$ ein Normalteiler ist. $\square$

7.7 Proposition und Definition. *Es sei $p\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine reguläre Überlagerung. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ genau ein $D_\alpha \in \Delta$ mit $D_\alpha(x_0) = x_0\alpha$. Die dadurch definierte Abbildung*

$$\begin{aligned} \pi_1(Y, y_0) &\to \Delta(p) \\ \alpha &\mapsto D_\alpha \end{aligned}$$

ist ein Epimorphismus mit Kern $p_\#[\pi_1(X, x_0)]$. Insbesondere ist

$$\Delta(p) \cong \pi_1(Y, y_0)/p_\#[\pi_1(X, x_0)].$$

Speziell ist für den Fall, dass X einfach zusammenhängend ist, die Abbildung $\alpha \mapsto D_\alpha$ ein Isomorphismus $\pi_1(Y, y_0) \cong \Delta(p)$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt aus der Voraussetzung der Regularität der Überlagerung und der Eindeutigkeitsaussage aus Proposition 7.1. Aus eben dieser Eindeutigkeit zusammen mit der Transitivität der Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf der Faser folgt, dass jedes $D \in \Delta$ von der Form D_α ist, also die Surjektivität der Abbildung. Sie ist ein Homomorphismus, denn mit Proposition 7.3 folgt

$$D_{\alpha\beta}(x_0) = x_0\alpha\beta = D_\beta(x_0\alpha) = (D_\beta x_0)\alpha = D_\alpha D_\beta x_0$$

und damit $D_{\alpha\beta} = D_\alpha D_\beta$. Weiterhin ist $D_\alpha = \mathrm{id}_X \iff D_\alpha(x_0) = \mathrm{id}_X(x_0) \iff x_0\alpha = x_0$, was zusammen mit Proposition 6.3 die Aussage über den Kern zeigt. Ist X einfach zusammenhängend, so ist der Kern trivial und die Abbildung ein Isomorphismus, ansonsten liefert der Homomorphiesatz für Gruppen $\Delta(p) \cong \pi_1(Y, y_0)/p_\#[\pi_1(X, x_0)]$. □

7.8 Beispiel. Für die in Beispiel 6.5 betrachtete Überlagerung der Kleinschen Flasche hatten wir bereits dort festgestellt, dass die Untergruppe $p_\#[\pi_1(X, x_0)] = \{\beta^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ein Normalteiler ist, die Überlagerung ist also regulär. Mit $\bar{f} : X \to X$, $\bar{f}([x, y] = [x + 1, 1 - y])$ sieht man leicht, dass $\bar{f} \in \Delta$. Es ist $\bar{f}(x_0) = x_1 = x_0\alpha$, also ist $D_\alpha = \bar{f}$. Man erhält nun aus der Proposition, dass $D_{\alpha^m\beta^n} = \bar{f}^m$ und $\Delta = \left\{\bar{f}^m : m \in \mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z}$.

Klassifikation von Überlagerungen

7.9 Definition. Sind $p_1 : X_1 \to Y$, $p_2 : X_2 \to Y$ Überlagerungen, so nennen wir sie äquivalent, wenn ein Homöomorphismus $h : X_1 \to X_2$ existiert, so dass $p_2 \circ h = p_1$.

Sind in allen Räumen Basispunkte gewählt, also $p_1 : (X_1, x_1) \to (Y, y)$, $p_2 : (X_2, x_2) \to (Y, y)$, so heißen p_1 und p_2 äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes, wenn ein Homöomorphismus $h : (X, x_1) \to (X, x_2)$ mit $p_2 \circ h = p_1$ existiert.

7.10 Proposition. *Es seien $p_1 : (X_1, x_1) \to (Y, y)$, $p_2 : (X_2, x_2) \to (Y, y)$ Überlagerungen. Dann sind p_1 und p_2 äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes, wenn*

$$(p_1)_\#[\pi_1(X_1, x_1)] = (p_2)_\#[\pi_1(X_2, x_2)].$$

Die Überlagerungen p_1 und p_2 sind äquivalent ohne Berücksichtigung des Basispunktes, wenn $(p_1)_\#[\pi_1(X_1, x_1)]$ und $(p_2)_\#[\pi_1(X_2, x_2)]$ konjugierte Untergruppen sind, wenn es also ein $\alpha \in \pi_1(Y.y_0)$ gibt, so dass

$$(p_1)_\#[\pi_1(X_1, x_1)] = \alpha((p_2)_\#[\pi_1(X_2, x_2)])\alpha^{-1}.$$

Beweis. Die Aussage zur Äquivalenz mit Berücksichtigung des Basispunkts wurde für den Spezialfall $X_1 = X_2$ in Proposition 7.4 bewiesen, und der dortige Beweis zeigt auch den hier benötigten allgemeineren Fall.

Um daraus die Aussage zur Äquivalenz ohne Basispunkt abzuleiten, bemerkt man, dass p_1 und p_2 genau dann äquivalent ohne Berücksichtigung des Basispunktes sind, wenn sie nach Wechsel des Basispunktes äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes sind, wenn also ein $\alpha \in \pi_1(Y, y)$ existiert, so dass $p_1 : (X_1, x_1\alpha) \to (Y, y)$ und $p_2 : (X_2, x_2) \to (Y, y)$ äquivalent mit Berücksichtigung des Basispunktes sind. □

7.11 Proposition. *Es sei $\tilde{p}\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (Y, y_0)$ eine Überlagerung und $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend. Weiterhin sei G eine Untergruppe von $\pi_1(Y, y_0)$.*

Es sei $\tilde{G} := \{D_\alpha\colon \alpha \in G\} \subset \Delta$ und $X := \tilde{X}/\tilde{G}$, $q\colon \tilde{X} \to X$ die Quotientenabbildung, $x_0 := q(\tilde{x}_0)$. Dann definiert $p \circ q = \tilde{p}$ eine Überlagerungsabbildung $p\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, und es ist $p_\#[\pi_1(X, x_0)] = G$.

Beweis. Zunächst einmal gilt fur $x, x' \in \tilde{X}$ mit $q(x) = q(x')$ nach Defintion, dass ein $D \in \tilde{G} \subset \Delta(\tilde{p})$ mit $Dx = x'$ existiert, also $\tilde{p}(x') = (\tilde{p} \circ D)(x) = \tilde{p}(x)$. Damit ist p wohldefiniert. Da $X = \tilde{X}/\tilde{G}$ die Quotientenabbildung trägt, ist p stetig. Wir skizzieren nun, dass p eine Überlagerung ist.

Es sei $y \in Y$ und U eine gleichmäßig überdeckte Umgebung von y. Ist nun V eine Komponente von $\tilde{p}^{-1}$ und $D \in \Delta(\tilde{p})$, $D \neq \mathrm{id}$, so wird V von D homöomorph auf eine von V verschiedene Komponente V' abgebildet. Es folgt, dass die Abbildungen $V \xrightarrow{q} q[V] \xrightarrow{p} U$ Homöomorphismen sind und $q[V]$ eine Komponente von $p^{-1}[U]$ ist. Daher ist U auch bezüglich p gleichmäßig überdeckt.

Sei nun $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$. Man sieht leicht, dass $x_0\alpha = q(\tilde{x}_0\alpha)$. Es ist also $\alpha \in p_\#[\pi_1(X, x_0)] \iff x_0\alpha = x_0 \iff q(\tilde{x}_0\alpha) = q(\tilde{x}_0) \iff q(D_\alpha \tilde{x}_0) = q(\tilde{x}_0) \iff D_\alpha \in \tilde{G} \iff \alpha \in G$. Die letzte Äquivalenz benutzt dabei, dass $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend und damit $\alpha \mapsto D_\alpha$ injektiv ist. $\square$

7.12 Definition. Aus diesem Grund heißt eine Überlagerung $p\colon X \to Y$ von Y, bei der der Raum X einfach zusammenhängend ist, die *universelle Überlagerung* von X.

7.13 Beispiel. Die Überlagerung der Kleinschen Flasche durch $\mathbb{R}^2$ ist eine universelle Überlagerung. Die Überlagerung aus Beispiel 6.4 ergibt sich hieraus als $\mathbb{R}^2/G_1$ mit $G_1 = \{f^m\colon m \in \mathbb{Z}\} = \{D_{\alpha^m}\colon m \in \mathbb{Z}\}$, die aus Beispiel 6.5 als $\mathbb{R}^2/G_2$ mit $G_2 = \{g^m\colon m \in \mathbb{Z}\} = \{D_{\beta^m}\colon m \in \mathbb{Z}\}$.

7.14 Proposition. *Es sei Y ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) Y hat eine universelle Überlagerung.

(ii) Y ist semilokal einfach zusammenhängend*, das heißt, dass zu jedem $y \in Y$ eine Umgebung U von y existiert, so dass*

$$\operatorname{im}\bigl(\pi_1(U, y) \xrightarrow{\mathrm{Inkl}_\#} \pi_1(Y, y)\bigr) = \{e\}\,.$$

7.15 Beispiel (Die Hawaiianischen Ohrringe)**.** Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ setzen wir $i_n\colon (\mathbb{S}^1, (1,0)) \to (\mathbb{R}^2, (0,0))$, $i_n(x) = \frac{1}{n}(1 - x)$ und $S_n := \operatorname{im} i_n$. Dann ist der Raum $X := \bigcup_{n=1}^\infty$ nicht semilokal einfach zusammenhängend. Es existiert nämlich zu jedem n eine stetige Abbildung $q_n\colon X \to \mathbb{S}^1$ mit $q_n \circ i_n = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, man bilde einfach alle Punkte aus $X \setminus S_n$ auf $(1,0)$ ab. Dies zeigt, dass

$$\operatorname{im}\bigl(\pi_1(S^n, 0) \xrightarrow{\mathrm{Inkl}_\#} \pi_1(X, 0)\bigr) \neq \{e\}\,,$$

es enthält aber jede Umgebung von $(0,0)$ ein (sogar fast alle) S_n.

Beweis von (i) $\Rightarrow$ (ii). Es sei $p\colon X \to Y$ eine universelle Überlagerung, $y \in Y$. Es sei weiter U eine gleichmäßig überdeckte Umgebung von y, $x \in p^{-1}[\{y\}]$ und V die Komponente von $p^{-1}[U]$, die x enthält. Die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V,x) \arrow[r, "\mathrm{Inkl}_\#"] \arrow[d, "(p|_V)_\#", "\cong"'] & \pi_1(X,x) = \{e\} \arrow[d, "p_\#"] \\ \pi_1(U,y) \arrow[r, "\mathrm{Inkl}_\#"] & \pi_1(Y,y) \end{tikzcd}$$

zeigt nun die Behauptung. $\square$

Beweisidee zu (ii) $\Rightarrow$ (i). Zu einer Abbildung $p\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ können wir das kommutative Diagramm von Mengen

$$\begin{tikzcd} \{\tilde{w}\colon I \to X : \tilde{w}(0) = x_0\} /_{\simeq_{\{0,1\}}} \arrow[r, "{[\tilde{w}] \mapsto \tilde{w}(1)}"] \arrow[d, "{[\tilde{w}] \mapsto [p \circ w]}"] & X \arrow[d, "p"] \\ \{w\colon I \to Y : w(0) = y_0\} /_{\simeq_{\{0,1\}}} \arrow[r, "{[w] \mapsto w(1)}"] & Y \end{tikzcd}$$

betrachten. Ist p eine Überlagerung, so ist aufgrund der Hochhebungseigenschaften der linke Pfeil eine Bijektion. Ist X einfach zusammenhängend, so ist der obere Pfeil eine Bijektion. Um eine universelle Überlagerung zu erhalten, *definieren* wir daher $X := \{w\colon I \to Y : w(0) = y_0\} /_{\simeq_{\{0,1\}}}$ und $p([w]) = w(1)$. Es bleibt dann, auf der Menge X mit Hilfe der Topologie auf Y eine Topologie zu definieren und zu zeigen, dass unter den Voraussetzungen der Proposition damit p zu einer Überlagerung wird und X einfach zusammenhängend ist. Die Details kann man in der Literatur nachlesen. $\square$

Die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

Wir wollen die universelle Überlagerung des Raums $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ beschreiben und nutzen, um $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ zu bestimmen.

Wir definieren zunächst abstrakt einen Graphen. Als erstes fixieren wir eine vierelementige Menge und nennen ihre Elemente gemäß ihrer späteren Verwendung α, α^{-1}, β, β^{-1}, ohne dass damit zunächst Bedeutung verbunden wäre. Die Eckenmenge V sei nun die Menge aller endlichen Folgen in dieser Menge, in denen kein α auf ein α^{-1}, kein α^{-1} auf ein α, kein β auf ein β^{-1} und kein β^{-1} auf ein β folgt. Die Kantenmenge E bestehe nun aus allen Paaren $(u,v) \in V \times V$, so dass die Folge v um eins länger als die Folge u ist und diese als Anfangsstück hat. (Wir haben den Graphen also als gerichteten Graphen definiert.) Wir bemerken jetzt schon, dass jede Ecke Grad 4 hat (die leere Folge ist auch Element der Eckenmenge).

Wir ordnen dem Graphen G nun einen Raum, seine *Realisierung* $|G|$ zu. Dies werden wir später im Rahmen von Simplizialkomplexen genauer beschreiben, vorerst genüge es, zu sagen, dass wir für jede Kante eine Kopie des abgeschlossenen Intervalls $[0, 1]$ nehmen und an den Endpunkten gemäß der Information aus G zusammenkleben, so dass es dem entspricht, was man erhält, wenn man eine Zeichnung von G anfertigt.

Wir definieren nun eine Abbildung $p\colon |G| \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Dazu bilden wir jede der Ecken des Graphen auf den Basispunkt von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ab und jede der Kanten auf eine der beiden Kreislinien und zwar so, dass das Innere der Kante homöomorph auf das Komplement des Basispunkts abgebildet wird. Bezeichnen wir ein Element von $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$, das einem Erzeuger der Fundamentalgruppe einer der Kreislinien entspricht, mit α und das Element, das einem Erzeuger der Fundamentalgruppe der anderen Kreislinie entspricht, mit β, so sei p derart gewählt, dass die Einschränkung von p auf das einer Kante der Form $(u, u\alpha)$ entsprechende Intervall gerade α repräsentiert, für eine Kante der Form $(u, u\alpha^{-1})$ ergebe sich α^{-1} und so weiter.

Man überzeugt sich nun davon, dass p eine Überlagerung ist, was im wesentlichen daran liegt, von den vier an einer Ecke anstoßenden Kanten, je eine eine der beiden Kreislinien in eine der beiden möglichen Richtungen durchläuft.

Jede Ecke u von G repräsentiert auf die offensichtliche Art ein Element $f(u) \in \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$, so dass beispielsweise für $u = (\alpha, \alpha, \beta, \alpha^{-1})$ gilt, dass $f(u) = \alpha^2\beta\alpha^{-1}$. Unsere Mühe wird nun dadurch belohnt, dass wir sehen, dass f eine Bijektion ist. Wir sehen es zumindest fast:

7.16 Proposition. *Die Abbildung* $f\colon V \to \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ *ist injektiv. Sie ist genau dann surjektiv, wenn* $|G|$ *einfach zusammenhängend ist.*

In der Tat ist $|G|$ sogar zusammenziehbar. Das kann man daraus folgern, dass G ein Graph ist, wir wollen dies aber im Moment nicht tun.

Beweis. Wir bezeichnen die Faser des Basispunkts in der Überlagerung p mit F. Die Faser entspricht gerade der Eckenmenge von G, und wir bezeichnen den Punkt, der der leeren Folge entspricht, mit x_0 und den Punkt, der einer beliebigen Ecke u entspricht mit $|u|$.

Die Konstruktion ist nun so, dass, wenn $w_u\colon I \to |G|$ der offensichtliche Weg von x_0 nach $|u|$ ist, der Weg $p \circ w_u$ die Klasse $l(u)$ repräsentiert. Es ist also $x_0 l(u) = |u|$. Die Komposition

$$V \xrightarrow{f} \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \xrightarrow{g \mapsto x_0 g} F$$

ist also eine Bijektion. Damit ist f injektiv. Außerdem ist f genau dann surjektiv, wenn die Operation auf der Faser (der zweite Pfeil) injektiv ist. Wir wissen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $p_\#[\pi_1(|G|)] = \{e\}$, wenn also $|G|$ einfach zusammenhängend ist ($p_\#$ ist injektiv). □