Abschnitt 8

Der Satz von Seifert und van Kampen

8.1 Satz. *Es sei X ein Raum, $U_0, U_1 \subset X$ offene Teilmengen, $U_0 \cup U_1 = X$, $x_0 \in U_0 \cap U_1$, und es seien $U_0 \cap U_1$, U_0 und U_1 wegzusammenhängend. Wir bezeichnen die Inklusionsabbildungen wie folgt:*

$$\begin{tikzcd} (U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0"] \arrow[d, "j^1"'] & (U_0, x_0) \arrow[d, "i^0"] \\ (U_1, x_0) \arrow[r, "i^1"] & (X, x_0). \end{tikzcd}$$

Dies liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d, "j^1_\#"'] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "i^0_\#"] \\ \pi_1(U_1, x_0) \arrow[r, "i^1_\#"] & \pi_1(X, x_0). \end{tikzcd} \tag{8.1}$$

von Gruppen und Homomorphismen. Dieses erfüllt die folgenden Eigenschaften.

(i) Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird von der Teilmenge $\operatorname{im} i^0_\# \cup \operatorname{im} i^1_\#$ erzeugt.

(ii) Ist K eine beliebige Gruppe und sind ϕ_0, ϕ_1 Homomorphismen, die ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d, "j^1_\#"'] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "\phi_0"] \\ \pi_1(U_1, x_0) \arrow[r, "\phi_1"] & K \end{tikzcd} \tag{8.2}$$

liefern, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $s_0, \dots, s_{n-1} \in \{0, 1\}$, $\alpha_k \in \pi_1(U_k, x_0)$, so dass

$$i^{s_0}_\#(\alpha_0) i^{s_1}_\#(\alpha_1) \cdots i^{s_{n-1}}_\#(\alpha_{n-1}) = e \tag{8.3}$$

auch

$$\phi_{s_0}(\alpha_0)\phi_{s_1}(\alpha_1) \cdots \phi_{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e.$$

8.2 Bemerkung. Kürzer können wir das wie folgt formulieren: Die Gruppe $\pi_1(X)$ wird von den Elementen aus $\pi_1(U_0)$ und $\pi_1(U_1)$ erzeugt, und zwischen diesen bestehen die Relationen, die für die Kommutativität von (8.1) nöting sind, aber keine weiteren.

Die in Satz 8.1 gewählte Formulierung ist ein Kompromiss. Einerseits werden wir im Beweis eine konkretere Form von (ii) erhalten: Gegeben (8.3) kann man die linke Seite durch mehrere Schritte der Art „Rechnen in $\pi_1(U_0)$ oder $\pi_1(U_1)$“ und “Ausnutzen der Kommutativität von (8.1)“ auf die Form „e“ bringen. Falls dies jetzt noch etwas nebulös klingen sollte, wird dies hoffentlich im Beweis klarer.

Andererseits sind elegantere Formulierungen möglich, wie wir sie gleich bei der Definition des Begriffs eines Push-Out-Diagramms benutzen werden. Wir wollen aus Zeitgründen hier aber vermeiden, die Äquivalenz dieser Formulierungen zu beweisen.

8.3 Definition. Ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"] & H_0 \arrow[d, "h_0"] \\ H_1 \arrow[r, "h_1"] & K \end{tikzcd}$$

von Gruppen und Homomorphismen heißt ein *Push-Out-Diagramm*, wenn es kommutiert und für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"] & H_0 \arrow[d, "h_0'"] \\ H_1 \arrow[r, "h_1'"] & K' \end{tikzcd}$$

ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $k\colon K \to K'$ existiert, so dass $k \circ h_0 = h_0'$ und $k \circ h_1 = h_1'$, so dass also

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"] & H_0 \arrow[d, "h_0"] \arrow[ddr, bend left, "h_0'"] & \\ H_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[drr, bend right, "h_1'"'] & K \arrow[dr, dotted, "k", "!"'] & \\ & & K' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Zunächst bemerken wir, dass das obige Push-Out-Diagramm von g_0 und g_1 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

8.4 Proposition (Eindeutigkeit des Push-Outs)**.** *Sind*

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"] & H_0 \arrow[d, "h_0"] \\
H_1 \arrow[r, "h_1"] & K
\end{tikzcd}
\quad \textit{und} \quad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "g_1"] & H_0 \arrow[d, "h_0'"] \\
H_1 \arrow[r, "h_1'"] & K'
\end{tikzcd}
$$

Push-Out-Diagramme, so existiert ein Isomorphismus $k\colon K \to K'$*, so dass*

$$
\begin{tikzcd}
 & H_0 \arrow[d, "h_0"] \arrow[ddr, bend left, "h_0'"] & \\
H_1 \arrow[r, "h_1"'] \arrow[drr, bend right, "h_1'"'] & K \arrow[dr, "k", "\cong"'] & \\
 & & K'
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. $\square$

Beweis. Die Existenz eines Homomorphismus k, so dass das Diagramm kommutiert folgt aus der Push-Out-Eigenschaft des ersten Diagramms. Ebenso folgt aus der Eigenschaft des zweiten Diagramms die Existenz eines Homorphismus $k'\colon K' \to K$, so dass das Diagramm mit k' an Stelle von k kommutiert. Es ist nun nur noch zu zeigen, dass k und k' invers zu einander sind. Dazu bemerken wir, dass das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H_0 \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\
H_1 \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j"'] & K \arrow[dr, "k' \circ k"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Da das Diagramm auch mit id_K an Stelle von $k' \circ k$ kommutiert, folgt aus der Eindeutigkeitsforderung in der Definition eines Push-Out-Diagramms„ dass $k' \circ k = \mathrm{id}_K$. Ebenso folgt $k \circ k' = \mathrm{id}_{K'}$. Damit ist k ein Isomorphismus. $\square$

8.5 Proposition. *In Satz 8.1 ist* (8.1) *ein Push-Out-Diagramm.*

Beweis. In der Situation von Satz 8.1 sei das kommutative Diagramm (8.2) gegeben. Wir wollen zeigen, dass es einen eindeutigen Homomorphismus $h\colon \pi_1(X, x_0) \to K$ mit $h \circ i^k_\# = \phi_k$ gibt. Der Homomorphismus h erfüllt notwendigerweise

$$h(i^{s_0}_\#(\alpha_0) i^{s_1}_\#(\alpha_1) \cdots i^{s_{n-1}}_\#(\alpha_{n-1})) = \phi_{s_0}(\alpha_0)\phi_{s_1}(\alpha_1) \cdots \phi_{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}). \quad (8.4)$$

Aufgrund von (i) ist jedes Element aus $\pi_1(X)$ von der Form $i_\#^{s_0}(\alpha_0)\cdots i_\#^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1})$, so dass dies schon die Eindeutigkeit zeigt. Wir nutzen nun (8.4) zur Definition von h. Es ist die Wohldefiniert zu zeigen, h wird dann sicher ein Homomorphismus sein. Wir müssen also für

$$i_\#^{s_0}(\alpha_0)i_\#^{s_1}(\alpha_1)\cdots i_\#^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = i_\#^{s'_0}(\alpha'_0)i_\#^{s'_1}(\alpha'_1)\cdots i_\#^{s'_{n'-1}}(\alpha'_{n'-1})$$

zeigen, dass

$$\phi_{s_0}(\alpha_0)\phi_{s_1}(\alpha_1)\cdots\phi_{s_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = \phi_{s'_0}(\alpha'_0)\phi_{s'_1}(\alpha'_1)\cdots\phi_{s'_{n'-1}}(\alpha'_{n'-1}).$$

Dies folgt aber, indem wir (ii) auf

$$i_\#^{s_0}(\alpha_0)i_\#^{s_1}(\alpha_1)\cdots i_\#^{s_{n-1}}(\alpha_{n-1})i_\#^{s'_{n'-1}}({\alpha'}^{-1}_{n'-1})\cdots i_\#^{s'_1}({\alpha'}^{-1}_{1})i_\#^{s'_0}({\alpha'}^{-1}_{0}) = e$$

enwenden. □

8.6 Beispiel. Wir betrachten wieder $\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$ und die Einbettungen $i^0, i^1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$. Da die Bilder der Einbettungen nicht offen sind, können wir Satz 8.1 nicht direkt anwenden. Wählt man aber beispielsweise als offene Menge $U_k \subset \mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$ das Komplement eines Punktes, der nicht in $\operatorname{im} i^k$ liegt, so ist die Inklusionsabbildung $\operatorname{im} i^k \to U_k$ eine Homotopieäquivalenz und $U_0\cap U_1$ zusammenziehbar. Man hat also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & U_0 \arrow[d, "j^0"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[dl, "i^0"] \\
U_1 \arrow[r, "j^1"] & \mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1 & \\
\mathbb{S}^1 \arrow[u, "\simeq"] \arrow[ur, "i^1"'] & &
\end{tikzcd}$$

mit den Inklusionabbildungen $j^k\colon U_k \to \mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$. Dies liefert, da alle Abbildungen Basispunkte erhalten und $U_0\cap U_1$ einfach zusammenhängend ist, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[dr, "\cong"] \arrow[drrr, bend left, "\cong"] \arrow[dddr, bend right] & & & \\
 & \pi_1(U_0\cap U_1, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "j^0_\#"'] & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[l] \arrow[dl, "i^0_\#"] \\
 & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[r, "j^1_\#"] & \pi_1(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1, x_0) & \\
 & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1). \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "i^1_\#"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wir können daher das Diagramm (8.1) in Satz 8.1 durch

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[d, "i^0_\#"] \\
\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[r, "i^1_\#"'] & \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0)
\end{tikzcd}$$

ersetzen. Teil (i) des Satzes sagt also aus, dass $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ von $\operatorname{im} i^0_\# \cup \operatorname{im} i^1_\#$ erzeugt ist. Ist nun g ein Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, so ist $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ von $\alpha_0 := i^0_\#(g)$ und $\beta_0 := i^1_\#(g)$ erzeugt.

Teil (ii) ist hier besonders leicht zu verstehen, da das Diagramm (8.1), wenn $j^0_\#$ und $j^1_\#$ trivial sind, für beliebige ϕ_0 und ϕ_1 kommutiert. Benutzt man weiter, dass ein Homomorphismus $\phi_j\colon \pi_1(\mathbb{S}^1) \to K$ durch beliebige Angabe von $\phi_j(g) = a_j \in K$ festgelegt wird, so wird die Aussage von Teil (ii) dazu, dass

$$\alpha_{s_0}^{k_0}\alpha_{s_1}^{k_1}\cdots\alpha_{s_{n-1}}^{k_{n-1}} = e$$

nur dann, wenn

$$a_{s_0}^{k_0}a_{s_1}^{k_1}\cdots a_{s_{n-1}}^{k_{n-1}} = e$$

für alle Gruppen K und $a_0, a_1 \in K$. In Proposition 7.16 haben wir bereits gesehen, dass dies für $s_j \neq s_{j+1}$, $k_j \neq 0$, $n > 0$ in der Tat nie der Fall ist, und auch genauere Betrachtung des Beweises von Satz 8.1 wird dies ergeben.

8.7 Beispiel (Kleinsche Flasche)**.** U_0 Komplement des Mittelpunkts. U_1 Inneres. X Rand mit Identifizierungen. TO DO

Beweis von Satz 8.1. Zu (i). Sei $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert durch den geschlossenen Weg w. Da $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von X ist, liefert uns das Lebesgue-Lemma ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle k mit $0 \leq k < N$ ein r_k mit $w\left[[k/N, (k+1)/N]\right] \subset U_{r_k}$ existiert. Es ist bereits $w(0) = w(1) = x_0$, und wir zeigen nun, dass wir es immer so einrichten können, dass $w(k/N) = x_0$ für alle k mit $0 \leq k \leq N$. Dazu wählen wir zu jedem k mit $0 < k < N$ einen Weg v_k von $w(k/N)$ nach x_0. Da $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend ist, können wir es so einrichten, dass v_k in $U_{r_{k-1}} \cap U_{r_k}$ verläuft. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir außerdem $v_0 = v_N = c_{x_0}$. Nun ersetzen wir w durch einen Weg w', indem wir für $0 \leq k < N$ am Anfang des Stücks $w|_{[k/N,(k+1)/N]}$ den Weg v_k^- und am Ende den Weg v_{k+1} einsetzen. Wir machen das an dieser Stelle exakt und werden uns später mit solchen verbalen Beschreibungen begnügen:

$$\begin{aligned}
w'\colon I &\to X \\
s &\mapsto \begin{cases} v_k^-\left(3N\left(s - \frac{k}{N}\right)\right), & \frac{k}{N} \leq s \leq \frac{3k+1}{3N}, \\ w\left(\frac{k}{N} + 3\left(s - \frac{3k+1}{3N}\right)\right), & \frac{3k+1}{3N} \leq s \leq \frac{3k+2}{3N}, \\ v_{k+1}\left(3N\left(s - \frac{3k+2}{3N}\right)\right), & \frac{3k+2}{3N} \leq s \leq \frac{k+1}{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Da wir an den Enden konstante Wege und an den Stellen k/N für $0 < k < N$ die Wege $v_k * v_k^-$, die relativ zu $\{0,1\}$ homotop zu konstanten Wegen sind, eingefügt haben, ist $[w'] = [w] = \gamma$. Aufgrund der Wahl der v_k ist auch $w'\,[[k/N,(k+1)/N]] \subset U_{r_k}$. Da nun $w'(k/N) = x_0$ für alle k, repräsentiert $w|_{[k/N,(k+1)/N]}$ ein $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k})$, $0 \leq k < N$. Damit ist $\gamma = i_\#^{r_0}(\alpha_0) i_\#^{r_1}(\alpha_1) \cdots i_\#^{r_{N-1}}(\alpha_{N-1})$.

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, dass aus $i_\#^{r_0}(\alpha_0) \cdots i_\#^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$ folgt, dass $\phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$. Der Beweis ähnelt dem ersten Teil, nur dass an Stelle von Schleifen Homotopien von Schleifen zu betrachten sind, was ihn leider technisch aufwendiger macht.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ und für $0 \leq k < n$ sei $r_k \in \{0,1\}$ und $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k}, x_0)$, so dass $\phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$. Es sei $H\colon I \times I \to X$ eine Homotopie, die diese Gleicheit zeigt, und zwar sei $H(0,\bullet) = H(1,\bullet) = H(\bullet,1) = c_{x_0}$ und $H(\bullet,0)|_{[k/n,(k+1)/n]}$ repräsentiere α_k. Nun wenden wir wieder das Lebesgue-Lemma an, um ein $m \in \mathbb{N}$ zu erhalten, so dass mit $N := mn$ für alle k, l mit $0 \leq k, l < N$ ein $s_{k,l}$ mit $w\,[[k/N,(k+1)/N] \times [l/N,(l+1)/N]] \subset U_{s_{k,l}}$ existiert. Wir können diese $s_{k,l}$ so wählen, dass $s_{k,0} = r_{\lfloor k/m \rfloor}$ für alle k.

Zunächst zeigen wir, dass wir es so einrichten können, dass H auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt, dass also $H(k/N, l/N) = x_0$ für alle $0 \leq k, l \leq N$. Dazu definieren wir für alle $0 < k < N$, $0 \leq l < N$ einen Weg $v_{k,l}\colon I \to U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ durch $v_{k,l}(t) := H(k/N, (l+t)/N)$ und einen Weg $w_{k,l}$ von $H(k/N, l/N)$ nach x_0, der in U_0 verläuft, falls $H(k/N, l/N) \in U_0$, in U_1, falls $H(k/N, l/N) \in U_1$ und konstant ist, falls $H(k/N, l/N) = x_0$. Außerdem setzen wir $w_{k,N} = c_{x_0}$ für $0 < k < N$. Dann wählen wir für alle $0 < k < N$, $0 \leq l < N$ eine Abbildung $F_{k,l}\colon I \times I \to U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ mit $F_{k,l}(0,\bullet) = F_{k,l}(1,\bullet) = v_{k,l}$ und $F_{k,l}(\bullet,0) = w_{k,l} * w_{k,l}^-$, $F_{k,l}(\bullet,1) = w_{k+1,l} * w_{k+1,l}^-$. Dies ist möglich, da die auf dem Rand vorgegebene Abbildung homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Nun können wir H, indem wir an der Stelle $\{k/N\} \times [l/N,(l+1)/N]$ die Abbildung $F_{k,l}$ einpassen, so abändern, dass die oben bemerkten Eigenschaften von H erhalten bleiben und H zusätzlich auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt. Wir werden diese geänderte Abbildung weiterhin H nennen.

Die alten w und v vergessend definieren wir nun Wege

$$w_{k,l}\colon I \to X, \qquad 0 \leq k < N, 0 \leq k \leq N,$$
$$t \mapsto H((k+t)/N, l/N),$$

und

$$v_{k,l}\colon I \to X, \qquad 0 \leq k \leq N, 0 \leq k < N,$$
$$t \mapsto H(k/N, (l+t)/N).$$

Für $0 \leq k, l < N$ gibt uns das Klassen $\beta_{k,l}, \gamma_{k,l}, \delta_{k,l}, \epsilon_{k,l} \in \pi_1(U_{s_{k,l}})$ durch

$$\beta_{k,l} := [w_{k,l}], \qquad \gamma_{k,l} := [w_{k,l+1}], \qquad \delta_{k,l} := [v_{k,l}], \qquad \epsilon_{k,l} := [v_{k+1,l}].$$

Nun ist $\alpha_k = \beta_{mk,0}\beta_{mk+1,0} \cdots \beta_{m(k+1)-1,0}$ für $0 \leq k < n$ und $\gamma_{k,N-1} = e$ für alle $0 \leq k < N$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\phi_{s_{0,0}}(\beta_{0,0})\phi_{s_{1,0}}(\beta_{1,0}) \cdots \phi_{s_{N-1,0}}(\beta_{N-1,0}) = \\ = \phi_{s_{0,N-1}}(\gamma_{0,N-1})\phi_{s_{1,N-1}}(\gamma_{1,N-1}) \cdots \phi_{s_{N-1,N-1}}(\gamma_{N-1,N-1}).\end{aligned}$$

Wir tun dies in zwei Schritten.

Für alle $0 \leq k < N$ und $0 \leq l < N-1$ ist $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$: Nach Definition ist $\gamma_{k,l} = [w_{k,l+1}]$, $\beta_{k,l+1} = [w_{k,l+1}]$. Ist $s_{k,l} = s_{k,l+1}$, so ist $\gamma_{k,l} = \beta_{k,l+1}$ und alles klar. Ist $s_{k,l} \neq s_{k,l+1}$, so leben $\gamma_{k,l}$ und $\beta_{k,l+1}$ in verschiedenen Gruppen. In diesem Fall verläuft aber $w_{k,l+1}$ ganz in $U_0 \cap U_1$, so dass wir ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ durch $\rho := [w_{k,l+1}]$ definieren können. Es ist dann $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = (\phi_{s_{k,l}} \circ j_{\#}^{s_{k,l}})(\rho) = (\phi_{s_{k,l+1}} \circ j_{\#}^{s_{k,l+1}})(\rho) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$.

Für alle $0 \leq l < N$ ist

$$\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) = \phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l}) :$$

Zunächst zeigt $H|_{[k/N,(k+1)/N]\times[l/N,(l+1)/N]}$ für $0 \leq k < N$, dass $\beta_{k,l} = \delta_{k,l}\gamma_{k,l}\epsilon_{k,l}^{-1}$. Es ist also

$$\begin{aligned}&\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) = \\ &= \phi_{s_{0,l}}(\delta_{0,l}\gamma_{0,l}\epsilon_{0,l}^{-1}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l}\gamma_{N-1,l}\epsilon_{N-1,l}^{-1}) = \\ &= \phi_{s_{0,l}}(e)\phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l})\phi_{s_{0,l}}(\epsilon_{0,l})^{-1} \cdot \\ &\cdot \phi_{s_{1,l}}(\delta_{1,l})\phi_{s_{1,l}}(\gamma_{1,l}) \cdots \\ &\cdots \phi_{s_{N-2,l}}(\gamma_{N-2,l})\phi_{s_{N-2,l}}(\epsilon_{N-2,l})^{-1} \cdot \\ &\cdot \phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l})\phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l})\phi_{s_{N-1,l}}(e).\end{aligned}$$

Es genügt also, für $0 \leq k < N-1$ zu zeigen, dass $\phi_{s_{k,l}}(\epsilon_{k,l}) = \phi_{s_{k+1,l}}(\delta_{k+1,l})$. Nun werden $\epsilon_{k,l}$ und $\delta_{k+1,l}$ beide von $v_{k+1,l}$ repräsentiert, so dass sie für $s_{k,l} = s_{k+1,l}$ gleich sind und es ansonsten ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ mit $\epsilon_{k,l} = j_{\#}^{s_{k,l}}(\rho)$, $\delta_{k+1,l} = j_{\#}^{s_{k+1,l}}(\rho)$ gibt, so dass dies wieder aus der Kommutativität des Diagramms folgt. $\square$