Abschnitt 9

Das Anheften von Zellen

Verkleben

Summen

9.1 Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *Koprodukt* der M_j ist

$$\coprod_{j\in J} M_j := \bigcup_{j\in J} (M_j \times \{j\}) .$$

Die *kanonischen Inklusionen* sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} i_k \colon M_k &\to \coprod_{j\in J} M_j, \qquad k \in J, \\ x &\mapsto (x, k). \end{aligned}$$

Die Idee hinter der Konstruktion $M_j \times \{j\}$ ist nur, dass so ganz sicher für $j \neq j'$ die Mengen $M_j \times \{j\}$ und $M_{j'} \times \{j'\}$ disjunkt sind. Sind M_j und $M_{j'}$ für alle $j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ ohnehin disjunkt, können wir auch einfach $\coprod_{j\in J} M_j = \bigcup_{j\in J} M_j$ und $i_k(x) = x$ setzen.

Ist jedes M_j mit einer Topologie $\mathcal{T}_j$ versehen, so definiert

$$\left\{ O \subset \coprod_{j\in J} M_j \colon i_j^{-1}[O] \in \mathcal{T}_j \text{ für alle } j \in J \right\}$$

eine Topologie auf $\coprod_{j\in J} M_j$, die größte Topologie, bezüglich der alle i_k stetig werden. Wir verzichten hier darauf, diese Eigenschaften nachzurechnen.

9.2 Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Die *topologische Summe* $\coprod_{j\in J} X_j$ ist das Koprodukt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der soeben beschriebenen Topologie.

9.3 Notation. Wir schreiben auch $X_0 + \cdots + X_{n-1}$ für $\coprod_{j\in\{0,\dots,n-1\}} X_j$.

Verkleben

Wir betrachten nun einen speziellen Fall von Quotientenräumen. Dazu betrachten wir Räume X, Y, eine Teilmenge $A \subset X$ und eine stetige Abbildung $f\colon A \to Y$. Wir betrachten nun $Y + X$ mit den kanonischen Inklusionen $i_0\colon Y \to Y + X$ und $i_1\colon X \to Y + X$ und auf $Y + X$ die Äquivalenzrelation $\sim_f$, die von $i_0(f(x)) \sim_f i_1(x)$, $x \in A$, erzeugt wird, also

$$\begin{aligned}
i_0(y) \sim_f i_0(y') &\iff y = y' \\
i_0(y) \sim_f i_1(x) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\
i_1(x) \sim_f i_0(y) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\
i_1(x) \sim_f i_1(x') &\iff (x = x') \vee ((x, x' \in A) \wedge (f(x) = f(x'))).
\end{aligned}$$

9.4 Notation. In dieser Situation bezeichnen wir den Quotientenraum $(Y + X)/\!\sim_f$ mit $Y \cup_f X$ und sagen, er entstehe, indem man X vermittels f an Y anklebe. Bezeichnet $q\colon Y + X \to Y \cup_f X$ die Quotientenabbildung, so nennen wir

$$j\colon Y \xrightarrow{i_0} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

die *kanonische Inklusion* und

$$\chi\colon X \xrightarrow{i_1} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

die *charakteristische Abbildung.*

Wir bemerken, dass $M \subset Y \cup_f X$ genau dann offen (abgeschlossen) ist, wenn $j^{-1}[O]$ und $\chi^{-1}[O]$ offen (abgeschlossen) sind. Daraus ergibt sich sofort die folgende Charakterisierung.

9.5 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f\colon A \to Y$ stetig. Ist Z ein weiterer Raum und sind $g\colon X \to Z$, $h\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen, so dass $g|_A = h \circ f$, so existiert genau eine stetige Abbildung $k\colon Y \cup_f X \to Z$, so dass $k \circ \chi = g$ und $k \circ j = h$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "\chi"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
Y \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & Y \cup_f X \arrow[dr, dotted, "!"', "k"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

$\square$

Auch einfach, aber nicht völlig automatisch, ergibt sich folgendes.

9.6 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f\colon A \to Y$ stetig. Dann ist die kanonische Inklusion $j\colon Y \to Y \cup_f X$ eine Einbettung.*

Beweis. Die Stetigkeit von j ist klar. Die Injektivität folgt daraus, dass $i_0(y) \sim_f i_0(y')$ nur für $y = y'$. Sei nun $V \subset Y$ offen. Es ist zu zeigen, dass es ein offenes $U \subset Y \cup_f X$ gibt, so dass $V = j^{-1}[U]$ ist.

Wir betrachten zunächst $j[V]$. Es ist $\chi^{-1}[j[V]] = f^{-1}[V]$ eine offene Teilmenge von A, also existiert eine offene Menge $U' \subset X$ mit $U' \cap A = f^{-1}[V]$. Wir setzen $U := j[V] \cup \chi[U']$. Es ist $j^{-1}[U] = j^{-1}[j[V]] \cup j^{-1}[\chi[U']] = V \cup f[U' \cap A] = V$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\chi^{-1}[U]$ offen ist. Es ist $\chi^{-1}[j[V]] = f^{-1}[V]$ und $\chi^{-1}[\chi[U']] = U' \cup f^{-1}[f[U' \cap A]] = U' \cup f^{-1}[f[f^{-1}[V]]] = U' \cup f^{-1}[V]$ und da $f^{-1}[V] \subset U'$ ist $\chi^{-1}[U] = U'$. □

9.7 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f\colon A \to Y$ stetig. Ist $M \subset X \setminus A$ und M offen bzw. abgeschlossen in X, so ist $\chi[M]$ offen bzw. abgeschlossen.*

Ist A in X offen oder abgeschlossen, so ist $\chi|_{X\setminus A}$ eine Einbettung.

Beweis. Ist $M \subset X \setminus A$, so ist $j^{-1}[\chi[M]] = \emptyset$ und $\chi^{-1}[\chi[M]] = M$, also ist $\chi[M]$ genau dann offen beziehungsweise abgeschlossen, wenn M es ist.

Ist A abgeschlossen, so ist M genau dann offen in $X \setminus A$, wenn M offen in X ist. Da die Abbildung $\chi|_{X\setminus A}$ außerdem injektiv ist, ist sie in diesem Falle eine Einbettung. Ebenso ist, falls A offen ist, M genau dann abgeschlossen in $X \setminus A$, wenn M abgeschlossen in X ist. □

Das Anheften einer Zelle

Sei X ein Raum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung. Dann können wir den Raum

$$Y := X \cup_f \mathbb{D}^n$$

betrachten. Wir sagen in dieser Situation, Y gehe aus X durch Ankleben einer n-Zelle hervor. Wir wollen nun mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen untersuchen, wie sich die Fundamentalgruppe von Y aus der von X ergibt.

Mit der Notation aus 9.4 haben wir eine Einbettung $j\colon X \to Y$ und die charakteristische Abbildung $\chi\colon \mathbb{D}^n \to Y$.

Um den Satz von Seifert und van Kampen anwenden zu können, setzen wir nun

$$\begin{aligned} U_0 &:= Y \setminus \{\chi(0)\}, \\ U_1 &:= \chi[\mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}]. \end{aligned}$$

Wir können U_0 mit $X \cup_f (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$ identifizieren. Wenn wir annehmen, dass X wegzusammenhängend ist, erfüllen U_0 und U_1 für $n \geq 2$ die Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van Kampen. Das einzige, das hierbei vielleicht nicht sofort ersichtlich ist, ist, dass U_0 wegzusammenhängend ist. Das folgt aber daraus, dass $U_0 \simeq X$:

9.8 Proposition. *Sei $n \geq 1$ und $r\colon U_0 \to X$ die Abbildung, die durch die Kommutativität von*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\mathit{Inkl.}"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{D}^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \arrow[ddr, bend left, "x \mapsto f(x/\|x\|)"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}"'] & U_0 \arrow[dr, "r"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

gegeben ist (siehe Proposition 9.5). Dann ist $r \circ j = \mathrm{id}_X$ und $j \circ r \simeq \mathrm{id}_{U_0}$, wobei die Homotopie $H\colon U_0 \times I \to U_0$ durch $H(\bullet, t) = h_t$ und die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\mathit{Inkl.}"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{D}^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \arrow[dr, "x \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right) x"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & U_0 \arrow[dr, "h_t"] & \mathbb{D}^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \\
 & X \arrow[r, "j"'] & U_0
\end{tikzcd}$$

gegeben ist.

Beweis. Das einzige Problem ist die Stetigkeit von H. Es bezeichne $q\colon X + (\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \to U_0$ die Quotientenabbildung. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times I + (\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I) \arrow[d, "\cong"] \arrow[ddr, bend left, "\tilde{H}"] & \\
(X + (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})) \times I \arrow[d, "q \times \mathrm{id}_I"] & \\
U_0 \times I \arrow[r, "H"] & U_0.
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung links oben sei die offensichtliche; dass sie ein Homöomorphismus ist, rechne man zur Übung nach. $\tilde{H}$ sei durch die Kommutativität des Diagramms gegeben und ist stetig, denn die Restriktion auf $X \times I$ ist die Projektion auf X gefolgt von j, und die Restriktion auf $(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I$ ist die Komposition

$$(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{(x,t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right) x} (\mathbb{D}^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{\chi} U_0.$$

Die Stetigkeit von H folgt also daraus, dass $q \times \mathrm{id}_I$ nach Lemma 1.27 eine Quotientenabbildung ist. $\square$

Der Effekt auf die Fundamentalgruppe

Wir nehmen nun an, dass $n \geq 2$, so dass $U_0 \cap U_1 \approx \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ wegzusammenhängend ist. Da $U_1 \approx \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ zusammenziehbar, also insbesondere einfach zusammenhängend, ist, haben wir es mit einem einfacheren Spezialfall des Satzes von Seifert und van Kampen zu tun, denn das Push-Out-Diagramm ist von der folgenden Form.

9.9 Lemma. *Ein Diagramm*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d] & H \arrow[d, "h"] \\ \{e\} \arrow[r] & K \end{tikzcd} \tag{9.1}$$

ist genau dann ein Push-Out-Diagramm, wenn h surjektiv ist und der Kern von h der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von g enthält.

Beweis. Es sei $N \subset H$ der kleinste Normalteiler, der $\operatorname{im} g$ enthält. Dann faktorisiert jeder Homomorphismus $\phi\colon H \to L$ mit $\operatorname{im} g \subset \ker \phi$ eindeutig über H/N. Das heißt aber gerade, dass

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d] & H \arrow[d, two heads] \\ \{e\} \arrow[r] & H/N \end{tikzcd} \tag{9.2}$$

ein Push-Out-Diagramm ist. Ist h surjektiv und $\ker h = N$, so existiert ein Isomorphismus $K \cong H/N$, so dass

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, two heads] \arrow[dr, "h"] & \\ H/N \arrow[r, "\cong"'] & K \end{tikzcd} \tag{9.3}$$

kommutiert. Damit ist (9.1) auch ein Push-Out-Diagramm. Ist andererseits (9.1) ein Push-Out-Diagramm, so folgt aus Proposition 8.4 die Existenz eines Isomorphismus wie in (9.3), so dass h surjektiv ist und $\ker h = N$. □

In unserem Fall ist also in der Sequenz von durch Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\pi_1(U_0 \cap U_1) \to \pi_1(U_0) \to \pi_1(Y)$$

der zweite Homomorphismus surjektiv und sein Kern der kleinste Normalteiler, der das Bild des ersten enthält. Wir können auch die ersten beiden

Gruppen identifizieren: Es ist $U_0 \cap U_1 \approx \mathbb{D}^n \setminus (\mathbb{S}^{n-1} \cup \{0\}) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ und wie bereits gezeigt $U_0 \simeq X$, also $\pi_1(U_0 \cap U_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ und $\pi_1(U_0) \cong \pi_1(X)$. Um daraus wirklich $\pi_1(Y)$ bestimmen zu können, müssen wir aber auch die Homomorphismen besser beschreiben.

Dazu legen wir zunächst Basispunkte fest. Wir schreiben $1 = (1, 0, \ldots, 0)$ für den Basispunkt von $\mathbb{S}^{n-1}$ und setzen $x_0 := f(1) \in X$, $y_0 := j(x_0) \in Y$. Außerdem wählen wir ein $y_0' \in U_0 \cap U_1$ mit $r(y_0) = x_0$, wobei wir hier die Bezeichnungen aus Proposition 9.8 beibehalten. Außerdem definieren wir eine Abbildung $r' \colon U_0 \cap U_1 \to \mathbb{S}^{n-1}$ durch Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^n \setminus (\mathbb{S}^{n-1} \cup \{0\}) \arrow[r, "x \mapsto \chi(x)", "\approx"'] \arrow[d, "x \mapsto \frac{x}{\|x\|}"', "\simeq"] & U_0 \cap U_1 \arrow[dl, "r'"] \\
\mathbb{S}^{n-1}. &
\end{tikzcd}$$

r' ist eine Homotopieäquivalenz und $r|_{U_0 \cap U_1} = f \circ r'$. Außerdem haben wir bereits festgestellt, dass H eine Homotopie zwischen der Komposition $U_0 \xrightarrow{r} X \xrightarrow{j} Y$ und der Inklusion $U_0 \to Y$ ist. Wie in Proposition 4.19 sei p der Weg, den y_0' während dieser Homotopie durchläuft; das ist der ‚direkte' Weg von y_0 nach y_0'. All dies liefert uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, 1) \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "j_\#"] & \pi_1(Y, y_0) \\
\pi_1(U_0 \cap U_1, y_0') \arrow[r] \arrow[u, "\cong", "r'_\#"'] & \pi_1(U_0, y_0') \arrow[r] \arrow[u, "\cong", "r_\#"'] & \pi_1(Y, y_0'), \arrow[u, "\cong", "h_p"']
\end{tikzcd}$$

wobei alle nicht beschrifteten Pfeile von Inklusionen induzierte Abbildungen bezeichnen. Aus dem bereits oben über die untere Reihe gezeigten, der Kommutativität des Diagramms und der Tatsache, dass die vertikalen Pfeile Isomorphismen bezeichnen, erhalten wir nun:

9.10 Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 2$, $f \colon (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f \mathbb{D}^n$ und $j \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von $f_\#$ enthält.* □

Wir benutzen nun noch, dass wir $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ kennen.

9.11 Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 3$, $f \colon (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f \mathbb{D}^n$ und $j \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Isomorphismus.* □

9.12 Proposition. *Sei X ein Raum, $f \colon (\mathbb{S}^1, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f \mathbb{D}^2$ und $j \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Ist $g \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $f_\#(g)$ enthält.* □

9.13 Bemerkung. Ist $h\colon I/\{0,1\} \to \mathbb{S}^1$ ein Homöomorphismus mit $h([\{0,1\}]) = 1$ und $q\colon I \to I/\{0,1\}$ die Quotientenabbildung, so ist $e := [h \circ q]$ ein Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. Ist nun (X, x_0) ein Raum mit Basispunkt und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha = [w]$, so definiert, da $w(0) = w(1)$, $f \circ h \circ q = w$ eine Abbildung $f\colon (\mathbb{S}^1, 1) \to (X, x_0)$, und es ist $f_\#(e) = \alpha$. Durch Ankleben einer 2-Zelle an X mit Hilfe von f (also entlang w) kann man also das Element α gezielt ‚abschießen'.

Beispiele

Kleinsche Flasche

TO DO

Projektive Räume

Man kann die reell-projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$ durch sukzessives Ankleben von Zellen aus dem einpunktigen Raum erhalten kann. Wir wollen nun sehen, wie man daraus mit Hilfe des eben gezeigten die Fundamentalgruppen dieser Räume bestimmen kann.

Sei $p_n\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ die Projektion, die sich aus der Definition von $\mathbb{RP}^n$ als Quotient von $\mathbb{S}^n$, bei dem gegenüberliegende Punkte identifiziert werden, ergibt. Dann ist $\mathbb{RP}^n \approx \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{p_{n-1}} \mathbb{D}^n$. Man erhält diesen Homöomorphismus so, dass

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[rr, "\text{Inklusion}"] \arrow[d, "p_{n-1}"] & & \mathbb{S}^n \arrow[d, "p_n"] \\ \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[r, "j^{n-1}"] & \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{p_{n-1}} \mathbb{D}^n \arrow[r, "\approx"] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei j^{n-1} die kanonische Inklusion bezeichne. Wir nehmen an, dass die Homöomorphismen so gewählt sind und bestimmen Basispunkte $x_n \in \mathbb{RP}^n$ durch $x_{n+1} = j^n(x_n)$.

Es ist $\mathbb{RP}^0$ ein einpunktiger Raum, also $\pi_1(\mathbb{RP}^0, x_0) = \{e\}$. Es ist $\mathbb{RP}^1 \approx \mathbb{S}^1$, also $\pi_1(\mathbb{RP}^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$. Einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{RP}^1$ und $\mathbb{S}^1$ kann man zum Beispiel so beschreiben: Die stetige Abbildung $\operatorname{sqr}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\operatorname{sqr}(z) := z^2$, ist surjektiv, also eine Quotientenabbildung, da $\mathbb{S}^1$ kompakt ist. Da nun $\operatorname{sqr}(x) = \operatorname{sqr}(y) \iff (x = y) \vee (x = -y)$ gibt es einen Homöomorphismus $h\colon \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{S}^1$, so dass $h \circ p_n = \operatorname{sqr}$. Da wir uns in Proposition 4.6 bereits überlegt haben, dass die Abbildung sqr vom Grad 2 ist, kann man also Isomorphismen so wählen, dass

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[r, "(p_1)_\#"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathbb{RP}^1, x_1) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus Proposition 9.12 angewandt auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cup_{p_1} \mathbb{D}^2$ ergibt sich also $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, x_2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_2$. Mit Proposition 9.11 folgt nun induktiv $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, x_n) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $n \geq 2$. Zusammenfassend und etwas genauer:

9.14 Proposition. *Es ist*

$$\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \begin{cases} \{e\}\,, & n = 0, \\ \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & n \geq 2. \end{cases}$$

Die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1})$ *ist ein Epimorphismus für* $n = 1$ *und ein Isomorphismus für* $n \geq 2$. □