Abschnitt 10

Simplizialkomplexe

Wir haben in Abschnitt 9 gesehen, wie sich die Fundamentalgruppe eines Raumes ändert, wenn wir an ihn eine Zelle ankleben. Dies wäre nun der Zeitpunkt, *Zellkomplexe* einzuführen, dies sind Räume, die man erhält, indem man mit einem diskreten Raum startet (dessen Punkte nennen wir 0-Zellen), an diesen dann 1-Zellen anklebt, an den entstandenen Raum dann 2-Zellen und so weiter. Wir begnügen uns aber mit einem Spezialfall davon, den *Simplizialkomplexen*. Diese lassen sich vollständig (also einschließlich der Anhefteabbildungen der Zellen) kombinatorisch beschreiben. Wir werden dann Eigenschaften des Raumes, beispielsweise seine Fundamentalgruppe, ebenfalls kombinatorisch beschreiben wollen.

Abstrakte Simplizialkomplexe und Triangulierungen

10.1 Definition. Ein *(abstrakter) Simplizialkomplex* $\mathcal{S}$ ist eine Menge endlicher Mengen, die abgeschlossen unter Teilmengenbildung ist, so dass also für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ und $\tau \subset \sigma$ gilt, dass $\tau \in \mathcal{S}$. In dieser Situation nennen wir σ einen $(|\sigma| - 1)$-Simplex von $\mathcal{S}$ und τ eine Seite von σ.

Wir nennen $V(\mathcal{S}) := \bigcup \mathcal{S}$ die *Eckenmenge* des abstrakten Simplizialkomplexes $\mathcal{S}$. Es ist dann $\{\{v\} : v \in V(\mathcal{S})\}$ die Menge der 0-Simplizes von $\mathcal{S}$. Im allgemeinen werden wir nicht zwischen der Ecke v und dem 0-Simplex $\{v\}$ unterscheiden.

Sind $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ abstrakte Simplizialkomplexe und ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, so nennen wir $\mathcal{T}$ einen *Unterkomplex* von $\mathcal{S}$.

10.2 Bemerkung. Nach dieser Definition gibt es zwei verschiedene abstrakte Simplizialkomplexe mit leerer Eckenmenge, nämlich $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$. Diese Unterscheidung ist tatsächlich manchmal sinnvoll.

Man beachte auch, dass außer dem Simplizialkomplex $\emptyset$ jeder abstrakte Simplizialkomplex das (-1)-Simplex $\emptyset$ enthält, auch wenn wir es häufig nicht erwähnen.

10.3 Definition. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$. Der *Standard-n-Simplex* ist der Raum

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon\ x_i \geq 0 \text{ für alle } i,\ \sum_i x_i = 1 \right\}.$$

Allgemeiner setzen wir für eine endliche Menge M

$$\Delta^M := \left\{ x \in \mathbb{R}^M \colon\ x_i \geq 0 \text{ für alle } i,\ \sum_i x_i = 1 \right\}$$

und weiterhin

$$\mathring{\Delta}^M := \left\{ x \in \mathbb{R}^M \colon\ x_i > 0 \text{ für alle } i,\ \sum_i x_i = 1 \right\}, \qquad \partial\Delta^M := \Delta^M \setminus \mathring{\Delta}^M.$$

Man beachte, dass letzteres Inneres und Rand in $\left\{ x \in \mathbb{R}^M \colon\ \sum_i x_i = 1 \right\}$ sind.

10.4 Bemerkung. Offenbar ist $\Delta^M \approx \Delta^{|M|-1}$, und wir werden oft Δ^n mit $\Delta^{\{0,1,\ldots,n\}}$ identifizieren. Durch $n \neq n+1$ entsteht hoffentlich keine Verwirrung, die Notation ist in dieser Hinsicht nicht optimal.

10.5 Definition. Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Für $\tau \subset \sigma \in \mathcal{S}$ definieren wir

$$i_\tau^\sigma \colon \Delta^\tau \to \Delta^\sigma$$
$$i_\tau^\sigma(x)_k := \begin{cases} x_k, & k \in \tau, \\ 0, & k \notin \tau. \end{cases}$$

Nun definieren wir

$$|\mathcal{S}| := \coprod_{\sigma \in \mathcal{S}} \Delta^\sigma \Big/ \sim$$

mit $x \sim x'$ für $x \in \Delta^\sigma$, $x' \in \Delta^{\sigma'}$ genau dann, wenn ein $y \in \Delta^{\sigma \cap \sigma'}$ mit $i^\sigma_{\sigma\cap\sigma'}(y) = x$ und $i^{\sigma'}_{\sigma\cap\sigma'}(y) = x'$ existiert. Wir nennen den Raum $|\mathcal{S}|$ die *Realisierung von* $\mathcal{S}$. Für $\sigma \in \mathcal{S}$ definieren wir die Abbildung

$$\chi_\sigma \colon \Delta^\sigma \to |\mathcal{S}|$$

als Komposition der Inklusionsabbildung in die topologische Summe und der Quotientenabbildung, wir nennen sie die *charakteristische Abbildung von* σ.

Wir haben uns bisher um die folgende Definition herumgedrückt, liefern sie nun aber doch noch nach.

10.6 Definition und Proposition. *Es seien J eine Menge und X sowie Y_j, $j \in J$ Räume und $f_j \colon Y_j \to X$ Funktionen. Wir sagen, X trage die* Finaltopologie *bezüglich der Funktionen f_j, wenn für alle $M \subset X$ gilt, dass M genau dann offen ist, wenn alle $f_j^{-1}[M]$ offen sind.*

Dies ist genau dann der Fall, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Die $f_j\colon Y_j \to X$ *sind stetig.*

(ii) Für alle Räume Z *und Funktionen* $g\colon X \to Z$ *gilt: Sind alle* $g \circ f_j\colon Y_j \to Z$ *stetig, so ist* $g\colon X \to Z$ *stetig.*

$$\begin{tikzcd} Y_j \arrow[dr, "f_j"'] \arrow[drr, "g\circ f_j"] & & \\ & X \arrow[r, dotted, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Beispiele von Finaltopologien sind Quotientenräume, topologische Summen und Kombinationen daraus. Insbesondere haben wir:

10.7 Lemma. $|\mathcal{S}|$ *trägt die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen* χ_σ, $\sigma \in \mathcal{S}$. □

10.8 Proposition. *Ist* $\mathcal{S}$ *ein abstrakter Simplizialkomplex und* $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ *ein Unterkomplex, so gibt es eine eindeutige Abbildung,* $j\colon |\mathcal{T}| \to |\mathcal{S}|$, *so dass*

$$\begin{tikzcd} {|\mathcal{T}|} \arrow[rr, "j"] & & {|\mathcal{S}|} \\ & \Delta^\sigma \arrow[ul, "\chi_\sigma^{\mathcal{T}}"] \arrow[ur, "\chi_\sigma^{\mathcal{S}}"'] & \end{tikzcd}$$

für alle $\sigma \in T$ *kommutiert. Diese Abbildung ist eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild.*

Wir können also in dieser Situation $|\mathcal{T}|$ als Unterraum von $|\mathcal{S}|$ auffassen.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $|\mathcal{T}|$ Vereinigung der Bilder der $\chi_\sigma^{\mathcal{T}}$ ist. Betrachten wir nun $\sigma, \sigma' \in \mathcal{T}$ und $x \in \Delta^\sigma$, $x' \in \Delta^{\sigma'}$. Dann ist $\chi_\sigma^{\mathcal{T}}(x) = \chi_{\sigma'}^{\mathcal{T}}(x')$ genau dann, wenn $y \in \Delta^{\sigma\cap\sigma'}$ mit $x = i^\sigma_{\sigma\cap\sigma'}(y)$, $x' = i^{\sigma'}_{\sigma\cap\sigma'}(y)$ existier, also genau dann, wenn $\chi_\sigma^{\mathcal{S}}(x) = \chi_{\sigma'}^{\mathcal{S}}(x')$. Damit ist j wohldefiniert und injektiv. Die Stetigkeit folgt sofort daraus, dass $|\mathcal{T}|$ die Finaltopologie bezüglich der $\chi_\sigma^{\mathcal{T}}$ trägt und die $\chi_\sigma^{\mathcal{S}}$ stetig sind.

Sei nun $A \subset |\mathcal{T}|$ abgeschlossen und $\sigma \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$(\chi_\sigma^{\mathcal{S}})^{-1}[j[A]] = \bigcup_{\tau\colon \sigma\supset\tau\in\mathcal{T}} i^\sigma_\tau[(\chi_\tau^{\mathcal{T}})^{-1}[A]]$$

endliche Vereinigung kompakter Mengen und damit abgeschlossen. Also ist $j[A]$ abgeschlossen in $|\mathcal{S}|$. Damit ist j eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild. □

10.9 Proposition. *Es sei* $\mathcal{S}$ *ein abstrakter Simplizialkomplex,* $n \geq 0$ *und* $f_0\colon V(\mathcal{S}) \to \mathbb{R}^n$ *eine Funktion. Dann definiert*

$$f(\chi_\sigma(\lambda)) = \sum_{v\in\sigma} \lambda_v f_0(v) \quad \textit{für alle } \sigma \in \mathcal{S} \tag{10.1}$$

eindeutig eine stetige Funktion $f\colon |\mathcal{S}| \to \mathbb{R}^n$, *und es gilt:*

(i) Ist für alle $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$ das System $(f_0(v))_{v\in\sigma\cup\sigma'}$ affin unabhängig, so ist f injektiv.

(ii) Ist f injektiv und $\mathcal{S}$ endlich, so ist f eine Einbettung.

Wir nennen f die affine Fortsetzung von f_0.

Beweis. Die Funktion ist wohldefiniert, da für $\tau \subset \sigma$ und $\lambda \in \Delta^\tau$

$$\sum_{v\in\sigma}(i_\tau^\sigma(\lambda))_v f_0(v) = \sum_{v\in\tau}\lambda_v f_0(v) + \sum_{v\in\sigma\setminus\tau} 0\cdot f_0(v) = \sum_{v\in\tau}\lambda_v f_0(v)$$

gilt. Da $|\mathcal{S}|$ die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen χ_σ trägt und $\Delta^\sigma \to |\mathcal{S}|$, $\lambda \mapsto \sum_{v\in\sigma}\lambda_v f_0(v)$ stetig ist, ist f stetig.

(i) Es sei $\lambda \in \Delta^\sigma$, $\lambda' \in \Delta^{\sigma'}$, $f(\chi_\sigma(\lambda)) = f(\chi_{\sigma'}(\lambda'))$. Es ist also

$$\sum_{v\in\sigma}\lambda_v f_0(v) = \sum_{v\in\sigma'}\lambda'_v f_0(v)$$

und aus der affinen Unabhängigkeit von $(f_0(v))_{v\in\sigma\cup\sigma'}$ folgt $\lambda_v = 0$ für $v \in \sigma\setminus\sigma'$ und $\lambda'_v = 0$ für $v \in \sigma'\setminus\sigma$. Also existiert ein $\mu \in \Delta^{\sigma\cap\sigma'}$ mit $\lambda = i^\sigma_{\sigma\cap\sigma'}(\mu)$, $\lambda' = i^{\sigma'}_{\sigma\cap\sigma'}(\mu')$. Es folgt $\chi_\sigma(\lambda) = (\chi_\sigma \circ i^\sigma_{\sigma\cap\sigma'})(\mu) = (\chi'_\sigma \circ i^{\sigma'}_{\sigma\cap\sigma'})(\mu) = \chi_{\sigma'}(\lambda')$.

(ii) Ist $\mathcal{S}$ endlich, so ist $|\mathcal{S}| = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{S}}\chi_\sigma[\Delta^\sigma]$ endliche Vereinigung quasikompakter Mengen und damit quasikompakt. Da $\mathbb{R}^n$ hausdorffsch ist, ist die injektive stetige Abbildung j eine Einbettung. □

Im folgenden werden wir für $\chi_\sigma(\lambda)$ auch $\sum_{v\in\sigma}\lambda_v v$ schreiben, was rein symbolisch zu verstehen ist. Die Vorschrift zur Definition von f wird damit zu $f(\sum_{v\in\sigma}\lambda_v v) = \sum_{v\in\sigma}\lambda_v f_0(v)$.

10.10 Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex.*

(i) Die Realisierung $|\mathcal{S}|$ ist hausdorffsch.

(ii) Ist $\mathcal{S}$ endlich, so ist $|\mathcal{S}|$ homöomorph zu einem kompakten Unterraum von $\mathbb{R}^{|V(\mathcal{S})|-1}$.

Beweis. (ii) Wir wählen affin unabhängige Punkte $f_0(v)$, $v \in V(\mathcal{S})$ und setzen affin fort, um eine Einbettung zu erhalten.

(i) Es seien $x, x' \in |\mathcal{S}|$, $x \neq x'$. Es sei $x \in \operatorname{im}\chi_\sigma$, $x' \in \operatorname{im}\chi_{\sigma'}$. Für $n = |\sigma\cup\sigma'| - 1$ wählen wir $f_0(v) \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig und $f_0(v) \in \mathbb{R}^n$ für $v \in V(\mathcal{S})\setminus(\sigma\cup\sigma')$ beliebig und setzen affin zu einer Abbildung f fort. Dann ist wie in der vorherigen Proposition $f(x) \neq f(x')$. Nun existieren $U \in \mathcal{U}(f(x))$, $U' \in \mathcal{U}(f(x'))$ mit $U \cap U' = \emptyset$, und es ist $f^{-1}[U] \in \mathcal{U}(x)$, $f^{-1}[U'] \in \mathcal{U}(x')$, $f^{-1}[U] \cap f^{-1}[U'] = \emptyset$. □

10.11 Lemma. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex und $M \subset |\mathcal{S}|$ derart, dass $\chi_\sigma^{-1}[M]$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ endlich ist. Dann ist M diskret und in $|\mathcal{S}|$ abgeschlossen.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\chi_\sigma^{-1}[M]$ für alle σ endlich, insbesondere also abgeschlossen. Damit ist M abgeschlossen. Gleiches gilt aber für jede Teilmenge von M, also ist M diskret. □

10.12 Korollar. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex und $K \subset |\mathcal{S}|$ kompakt. Dann ist existiert ein endlicher Unterkomplex $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, so dass $K \subset |\mathcal{T}|$.*

Beweis. Es sei $M := \left\{\sigma \in \mathcal{S} \colon \chi_\sigma^{-1}[K] \cap \mathring{\Delta}^\sigma \neq \emptyset\right\}$. Dann ist $\mathcal{T} := \bigcup_{\sigma \in M} \mathcal{P}(M)$ ein Unterkomplex von $\mathcal{S}$, $K \subset |\mathcal{T}|$, und $\mathcal{T}$ genau dann endlich, wenn M endlich ist. Letzteres bleibt zu zeigen.

Man wähle für jedes $\sigma \in M$ ein $x_\sigma \in K \cap \chi_\sigma[\mathring{\Delta}^\sigma]$. Dann sind diese x_σ paarweise verschieden und für jedes $\sigma \in \mathcal{S}$ ist $\chi_\sigma^{-1}[\{x_\tau \colon \tau \in M\}] = \chi_\sigma^{-1}[\{x_\tau \colon \tau \in M,\, \tau \subset \sigma\}]$ endlich, also ist $\{x_\sigma \colon \sigma \in M\}$ abgeschlossene diskrete Teilmenge der kompakten Menge K und damit endlich. □

Eine wichtige Konsequenz daraus wird sein, dass es zum Verständnis beispielsweise der Fundamentalgruppe eines Simplizalkomplexes genügt, diese für alle endlichen Unterkomplexe zu verstehen, denn jede Schleife verläuft in einem endlichen Unterkomplex und ebenso jede Homotopie von Schleifen, denn I und $I \times I$ sind ja kompakt.

Zunächst bemerken wir aber nur die folgende Konsequenz.

10.13 Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Dann ist $|\mathcal{S}|$ genau dann kompakt, wenn $\mathcal{S}$ endlich ist.* □

Wir vermerken die folgende Konsequenz aus Lemma 1.27, von der wir wieder den Fall $Z = I$ zur Konstruktion von Homotopien benötigen werden.

10.14 Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex und Z ein lokal kompakter Raum. Dann trägt $|\mathcal{S}| \times Z$ die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen $\chi_\sigma \times \mathrm{id}_Z \colon \Delta^\sigma \times Z \to |\mathcal{S}| \times Z$.* □

10.15 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Triangulierung von X* ist ein abstrakter Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ zusammen mit einem Homöomorphismus $h \colon |\mathcal{S}| \xrightarrow{\approx} X$. Ein Raum heißt *triangulierbar*, wenn er eine Triangulierung besitzt.