Abschnitt 11

Die Fundamentalgruppen von Simplizialkomplexen

Die Fundamentalgruppe eines unendlichen Simplizialkomplexes

Wir zeigen zuächst, dass es für das Verständnis der Fundamentalgruppe eines Simplizialkomplexes genügt, alle endlichen Unterkomplexe zu betrachten.

11.1 Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Für einen endlichen Unterkomplex $\mathcal{K}$ sei $i^{\mathcal{K}}\colon |\mathcal{K}| \to |\mathcal{S}|$ die Inklusionsabbildung. Ist $\mathcal{K}'$ ein weiterer Unterkomplex und $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, so bezeichne auch $i^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}\colon |\mathcal{K}| \to |\mathcal{K}'|$ die Inklusionsabbildung.*

(i) Ist $\alpha \in \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)$, so existiert ein endlicher Unterkomplex $\mathcal{K}$ mit $x_0 \in |\mathcal{K}|$, so dass $\alpha \in \operatorname{im} i^{\mathcal{K}}_{\#}$.

(ii) Ist $\mathcal{K}$ ein endlicher Unterkomplex und $\alpha \in \ker\bigl(\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0) \xrightarrow{i^{\mathcal{K}}_{\#}} \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)\bigr)$, so existiert ein endlicher Unterkomplex $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$, so dass $\alpha \in \ker i^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}_{\#}$.

11.2 Bemerkung. Diese Situation drückt man so aus, dass $\pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)$ (zusammen mit den Abbildungen $i^{\mathcal{K}}_{\#}$) *direkter Limes* oder *Kolimes* des Systems bestehend aus allen $\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0)$ und $i^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}_{\#}$ ist. Dabei durchlaufen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ alle endlichen Unterkomplexe mit $x_0 \in |\mathcal{K}|$ und $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$.

Beweis. Ist $\alpha \in \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)$, so existiert ein Weg w mit $\alpha = [w]$. Da I kompakt ist, ist $\operatorname{im} w$ kompakt, und nach Korollar 10.12 existiert ein endlicher Unterkomplex $\mathcal{K}$ mit $\operatorname{im} w \subset |\mathcal{K}|$. Der Weg w repräsentiert also auch ein Element aus $\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0)$, und dieses wird von $i^{\mathcal{K}}_{\#}$ auf α abgebildet.

Ist $\alpha \in \ker\bigl(\pi_1(|\mathcal{K}|, x_0) \xrightarrow{i^{\mathcal{K}}_{\#}} \pi_1(|\mathcal{S}|, x_0)\bigr)$, so ist $\alpha = [w]$ für ein $w\colon I \to |\mathcal{K}|$, und $w \simeq_{\{0,1\}} c_{x_0}$ in $|\mathcal{S}|$, also via eine Homotopie $H\colon I \times I \to |\mathcal{S}|$. Da auch $I \times I$ kompakt ist, existiert ein endlicher Unterkomplex $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}$ mit $\operatorname{im} H \subset |\mathcal{K}'|$, also $i^{\mathcal{K},\mathcal{K}'}_{\#}(\alpha) = e$. $\square$

Zusammenhang

Wir zeigen zunächst die fast offensichtliche Tatsache, dass sich für einen Simplizialkomplex die Zusammenhangskomponenten kombinatorisch beschreiben lassen.

11.3 Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Auf $V(\mathcal{S})$ sei die Äquivalenzrelation*

$$v \sim w \iff \text{Es existieren } u_0, \ldots, u_n \in V(\mathcal{S}) \text{ mit } u_0 = v,\ u_n = w \text{ und } \{u_j, u_{j+1}\} \in \mathcal{S} \text{ für alle } j,\ 0 \le j < n$$

definiert und C eine Äquivalenzklasse von $\sim$. Dann ist $\mathcal{C} := \mathcal{S} \cap \mathcal{P}(C)$ ein Unterkomplex von $\mathcal{S}$ und $|\mathcal{C}|$ offen und abgeschlossen in $|\mathcal{S}|$ sowie wegzusammenhängend, also eine Wegzusammenhangskomponente.

Insbesondere ist $|\mathcal{S}|$ genau dann zusammenhängend, wenn $v \sim w$ für alle $v, w \in V(\mathcal{S})$, und in diesem Fall auch wegzusammenhängend.

Beweis. Dass die Relation eine Äquivalenzrelation ist, ist offensichtlich. Ist $\sigma \in \mathcal{S}$, so sind alle $v \in \sigma$ zueinander äquivalent. Damit ist zunächst $\mathcal{C}$ ein Unterkomplex. Weiterhin heißt das, dass für jedes $\sigma \in \mathcal{S}$ die Menge $\chi_\sigma^{-1}[|\mathcal{C}|]$ leer oder gleich Δ^σ ist, in jedem Fall also offen und abgeschlossen. Damit ist $|\mathcal{C}|$ offen und abgeschlossen.

Sind $x, y \in |\mathcal{C}|$, so existieren $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{C}$ mit $x \in \operatorname{im} \chi_{\sigma_0}$, $y \in \operatorname{im} \chi_{\sigma_n}$ und $\sigma_j \cap \sigma_{j+1} \neq \emptyset$, also auch $\operatorname{im} \chi_{\sigma_j} \cap \operatorname{im} \chi_{\sigma_{j+1}} \neq \emptyset$. Da mit Δ^{σ_j} auch $\operatorname{im} \chi_{\sigma_j}$ wegzusammenhängend ist, ist daher $\bigcup_{j=0}^n \operatorname{im} \chi_{\sigma_j}$ wegzusammenhängend. Damit ist $|\mathcal{C}|$ wegzusammenhängend. □

Graphen

Nun wollen wir uns daran machen, eine kombinatorische Beschreibung für die Fundamentalgruppe eines Simplizialkomplexes zu erarbeiten. Wir betrachten zunächst 1-dimensionale Simplizialkomplexe.

11.4 Definition. Ein Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ ist ein *Graph*, wenn er von Dimension höchstens 1 ist, das heißt, wenn $|\sigma| \le 2$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

11.5 Definition. Ein Graph $\mathcal{G}$ heißt ein *Baum*, wenn er zusammenhängend ist (das heißt, wenn $|\mathcal{G}|$ zusammenhängend ist, siehe aber Proposition 11.3) und kreisfrei, wenn es also keine endliche Folge $u_0, \ldots, u_n$ mit $n > 2$, $u_0 = u_n$, $\{u_k, u_{k+1}\} \in \mathcal{G}$ für alle $0 \le k < n$ und $u_k \neq u_{k'}$ für $0 \le k < k' < n$ gibt.

Es ist plausibel, dass ein Graph, der kreisfrei ist, eine triviale Fundamentalgruppe hat. In der Tat gilt folgendes.

11.6 Proposition. *Sei $\mathcal{T}$ ein Baum. Dann ist $|\mathcal{T}|$ zusammenziehbar.*

Bevor wir diese Tatsache beweisen, führen wir etwas Notation ein. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ sei p_{u_0,u_1} der Weg $t \mapsto (1-t)u_0 + tu_1$ von u_0 nach u_1. Wir fixieren eine Ecke $v_0 \in V(\mathcal{T})$. Ist nun $u \in V(\mathcal{T})$ und $\mathcal{T}$ ein Baum, so existieren eindeutige $n \in \mathbb{N}$ und $v_j \in V(\mathcal{T})$, $0 < j \leq n$, so dass

$$\begin{aligned}
&v_n = u,\\
&\{v_j, v_{j+1}\} \in \mathcal{S} \text{ für alle } j,\ 0 \leq j < n, \text{ und}\\
&v_j \neq v_k \text{ für } j \neq k.
\end{aligned}$$

Mit diesen setzen wir

$$p_u := c_{v_0} * p_{v_0,v_1} * p_{v_1,v_2} * \cdots * p_{v_{n-1},v_n}.$$

Dieses verstehen wir so geklammert, dass $p_u = p_{v_{n-1}} * p_{v_{n-1},u}$. (Der konstante Weg am Anfang dient nur dazu, dies auch für $n = 1$ zu erhalten, erheblich ist das nicht.) Damit haben wir:

11.7 Lemma. *Ist $\{u, v\} \in \mathcal{T}$, $u \neq v$, so ist $p_v = p_u * p_{u,v}$ oder $p_u = p_v * p_{v,u}$. In beiden Fällen ist $p_v \simeq_{\{0,1\}} p_u * p_{u,v}$.* □

Beweis von Proposition 11.6. Wir wollen eine Homotopie $H\colon |\mathcal{T}| \times I \to |\mathcal{T}|$ konstruieren, so dass $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{|\mathcal{T}|}$ und $H(\cdot, 1) = c_{v_0}$ ist. Aus Proposition 10.14 wissen wir, dass wir H konstruieren können, indem wir für jedes $\sigma \in \mathcal{T}$ die Einschränkung von H auf $\operatorname{im}\chi_\sigma \times I$ so vorgeben, dass diese Abbildungen mit den Inklusionen verträglich sind. Wir beschreiben daher zunächst für jedes $u \in V(\mathcal{T})$ die Abbildung H auf $\operatorname{im}\chi_{\{u\}} \times I$. Wir wollen $H(u, 0) = u$, $H(u, 1) = v_0$. Dies erreichen wir durch $H(u, t) = p_u(1 - t)$.

Sei nun $\{u, v\} \in \mathcal{T}$, $u \neq v$. Wir wollen H auf $\operatorname{im}\chi_{\{u,v\}} \times I$ definieren. Dabei müssen wir weiterhin $H(u, t) = p_u(1 - t)$, $H(v, t) = p_v(1 - t)$ haben, außerdem wollen wir $H((1 - s)u + sv, 1) = v_0 = c_{v_0}(s)$, $H((1 - s)u + sv, 0) = (1 - s)u + sv = p_{u,v}(s)$ erreichen. Da aber $c_{v_0} * p_v \simeq_{\{0,1\}} p_u * p_{u,v}$ ist, existiert eine solche Abbildung auf $\operatorname{im}\chi_{\{u,v\}} \times I$. In der Tat können wir unter der Annahme, dass $p_v = p_u * p_{u,v}$ ist,

$$H((1-s)u + sv, t) = \begin{cases} p_u(1 - t/(1 - s/2)), & 2t \geq s,\\ p_{u,v}(s - 2t), & 2t \leq s \end{cases}$$

setzen. □

Damit haben wir auch noch einmal unabhängig vom Satz von Seifert und van Kampen gezeigt, dass der Graph aus Proposition 7.16 eine universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist und seine Ecken die Elemente von $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ repräsentieren.

Einschub: Freie Gruppen

Wir müssen ein Konzept nachholen, dass wir schon viel früher hätten einführen sollen.

11.8 Definition. Es sei G eine Gruppe und $(g_j)_{j\in J}$ ein System von Elementen von G. Wir sagen, dass G von diesem System *frei erzeugt* wird, wenn sich jedes Element aus G eindeutig in der Form

$$g_{j_1}^{m_1} g_{j_2}^{m_2} \cdots g_{j_n}^{m_n}. \quad n \in \mathbb{N},\, m_k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\, j_k \in J,\, j_k \neq j_{k+1} \tag{11.1}$$

(im Falle $n = 0$ bezeichne der Ausdruck das neutrale Element) schreiben lässt. Eine Gruppe heißt *frei*, wenn es ein System gibt, dass sie frei erzeugt.

11.9 Proposition. *Die Gruppe G sei frei von $(g_j)_{j\in J}$ erzeugt, H sei eine weitere Gruppe und $(h_j)_{j\in J}$ ein System von Elementen von H. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $f\colon G \to H$ mit $f(g_j) = h_j$ für alle $j \in J$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt bereits daraus, dass die Gruppe G von den Elementen g_j erzeugt wird. Nun ist $f\colon G \to H$ durch

$$f(g_{j_1}^{m_1} g_{j_2}^{m_2} \cdots g_{j_n}^{m_n}) = h_{j_1}^{m_1} h_{j_2}^{m_2} \cdots h_{j_n}^{m_n}, \qquad n \in \mathbb{N},\, m_k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\, j_k \in J,\, j_k \neq j_{k+1}$$

wohl-definiert und offensichtlich ein Homomorphismus. □

Wir benötigen die Existenz freier Gruppen über Mengen beliebiger Kardinalität.

11.10 Proposition. *Es sei J eine beliebige Menge. Dann existieren eine Gruppe G und ein System $(g_j)_{j\in J}$, so dass G frei von diesem erzeugt wird.*

Beweisskizze 1. Wir verallgemeinern die Konstruktion der universellen Überlagerung von $\mathbb{S} \vee \mathbb{S}^1$ auf den Raum $\bigvee_{j\in J} \mathbb{S}^1 := (J \times \mathbb{S}^1)/(J \times \{1\})$. Es sei $i^j\colon \mathbb{S}^1 \to \bigvee_{j\in J} \mathbb{S}^1$ die Einbettung, die sich aus der Komposition

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\approx} \{j\} \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\subseteq} J \times \mathbb{S}^1 \to \bigvee_{j\in J} \mathbb{S}^1$$

ergibt, $\beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ ein Erzeuger und $\alpha_j := i^j_\#(\beta)$. Man konstruiert nun wie in dem Abschnitt vor Proposition 7.16 eine Überlagerung von $\bigvee_{j\in J} \mathbb{S}^1$ durch einen Graphen G mit Basispunkt x, so dass die Abbildung

$$((j_1, m_1), \ldots, (j_n, m_n)) \mapsto x \cdot \alpha_{j_1}^{m_1} \ldots \alpha_{j_n}^{m_n}$$

eine Bijektion zwischen den endlichen Folgen $((j_1, m_1), \ldots, (j_n, m_n))$ wie in (11.1) und der Faser der Überlagerung ergibt. Wie in Proposition 7.16 ergibt sich daraus, dass $\pi_1(\bigvee_{j\in J} \mathbb{S}^1)$ frei von $(\alpha_j)_{j\in J}$ erzeugt wird. □

Beweisskizze 2. Wir betrachten endliche Folgen von Paaren (j, m) mit $j \in J$ und $m \in \mathbb{Z}$ in der Absicht, dass die Folge $(j_1, m_1) \cdots (j_s, m_s)$ später das Element $g_{j_1}^{m_1} \cdots g_{j_n}^{m_n}$ darstellen soll. Eine solche Folge nennen wir ein *Wort*. Für Wörter dieser Art führen wir zwei Arten von Reduktionsschritten ein, die die Länge n des Wortes um 1 verkürzen. Die erste Art ist das Weglassen eines Vorkommens von $(j, 0)$, die zweite das Ersetzen von $(j, m)(j, m')$ durch $(j, m + m')$. Worte, die keinen Reduktionsschritt zulassen, sind die, die Bedingungen wie in (11.1) erfüllen. Eine Folge von Reduktionsschritten nennen wir maximal, wenn sie in einem Wort endet, das keinen weiteren Reduktionsschritt zulässt. Offensichtlich gibt es zu jedem Wort eine in ihm startende maximale Folge von Reduktionsschritten.

Das wesentliche technische Lemma, das sich durch Induktion über die Wortlänge beweisen lässt, ist nun, dass zu einem gegebenen Wort jede in ihm startende maximale Folge von Reduktionsschritten in der selben Folge endet. Für zwei Folgen, die mit dem gleichen Schritt beginnen, folgt dies sofort aus der Induktionsvoraussetzung. Für Folgen, die mit verschiedenen Schritten beginnen, überlegt man sich, dass es ein Wort gibt, dass sich es ein Wort gibt, dass sich nach jedem der beiden Schritte durch je einen weiteren (im wesentlichen den anderen der beiden) erreichen lässt und nutzt das für die Induktion.

Das Wort, in dem eine maximale Folge von Reduktionsschritten eines Wortes endet, können wir daher die Reduktion dieses Wortes nennen. Wir nennen nun zwei Worte äquivalent, wenn sie die gleiche Reduktion haben. Auf der Menge der Äquivalenzklassen definieren wir eine Multiplikation durch Hintereinanderschreiben von Repräsentanten. Es ist nun leicht zu sehen, dass diese Multiplikation wohldefiniert ist und eine Gruppe mit der Klasse des leeren Worts als neutralem Element definiert. Diese Gruppe ist dann frei von den Elementen $g_j := [(j, 1)]$ erzeugt. $\square$

Die folgende Situation tritt auf, wenn im Satz von Seifert und van Kampen die Mengen U_0 und U_1 freie Fundamentalgruppen haben und ihr Schnitt einfach zusammenhängend ist.

11.11 Proposition. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} \{e\} \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, "h_0"] \\ G_1 \arrow[r, "h_1"] & H \end{tikzcd}$$

ein Push-out-Diagramm und G_i frei von $(\alpha_{k,j})_{j \in J_k}$ erzeugt, $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. Setzen wir dann $\beta_j = h_k(\alpha_{k,j})$ für $j \in J_k$, so wird H frei von $(\beta_j)_{j \in J_0 \cup J_1}$ erzeugt.

Beweis. Wir setzen $J := J_0 \cup J_1$. Es sei F eine Gruppe, die frei von $(\gamma_j)_{j \in J}$ erzeugt wird, eine solche Gruppe existiert nach Proposition 11.10. Da G_0

und G_1 frei sind, existieren Homomorphismen $f_k \colon G_k \to F$ mit $f_k(\alpha_{k,j}) = \gamma_j$. Nun kommutiert ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, "f_0"'] \arrow[ddr, "l_0"] & \\
G_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[drr, "l_1"'] & F \arrow[dr, "r"] & \\
 & & L
\end{tikzcd}$$

genau dann, wenn $r(\gamma_j) = l_k(\alpha_{k,j})$ für $j \in J_k$. Da F frei von den γ_j erzeugt wird, existiert ein solcher Homomorphismus für gegebene l_0, l_1 immer eindeutig, was heißt, dass

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, "f_0"] \\
G_1 \arrow[r, "f_1"] & F
\end{tikzcd}$$

ein Push-Out-Diagramm ist. Aus der Eindeutigkeit von Push-Outs folgt daher, dass ein Isomorphismus $r \colon L \to H$ mit $r \circ f_k = h_k$, also $r(\gamma_j) = \beta_j$ existiert. Damit ist H frei von $(\beta_j)_{j \in J}$ erzeugt. $\square$

Die Fundamentalgruppe eines Simplizialkomplexes

Wir wollen nun die Fundamentalgruppe eines Simplizialkomplexes beschreiben. Wir haben bereits gesehen, dass sich dies auf die Beschreibung der Fundamentalgruppen endlicher Unterkomplexe zurückführen lässt. Einen solchen bauen wir Simplex für Simplex auf und verfolgen dabei, wie sich die Fundamentalgruppe ändert.

Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex, $k \geq 0$, σ eine $(k+1)$-elementige Menge mit $\mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{S} = \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. Dann ist auch $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cup \{\sigma\}$ ein abstrakter Simplizialkomplex.

Es gibt einen Homöomorphismus $\Delta^\sigma \xrightarrow{\approx} \mathbb{D}^k$, der $\mathfrak{d}\Delta^\sigma$ auf $\mathbb{S}^{k-1}$ abbildet. Wir schreiben dafür $(\Delta^\sigma, \mathfrak{d}\Delta^\sigma) \approx (\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$. Wir betrachten die kanonische Einbettung $j \colon |\mathcal{S}| \to |\mathcal{S}'|$ aus Proposition 10.8 und die Abbildung $\chi_\sigma \colon \Delta^\sigma \to |\mathcal{S}'|$. Wir definieren $f_\sigma \colon \mathfrak{d}\Delta^\sigma \to |\mathcal{S}|$ durch $j \circ f_\sigma = \chi_\sigma|_{\mathfrak{d}\Delta^\sigma}$. Man prüft nun leicht nach, dass $|\mathcal{S}'| \approx |\mathcal{S}| \cup_{f_\sigma} \Delta^\sigma$. Das Hinzufügen eines k-Simplexes ist also ein Spezialfall des Anheftens einer k-Zelle wie in Abschnitt 9 betrachtet.

Wir wenden uns zunächst zusammenhängenden Graphen zu. Dazu wählen wir zunächst einen aufspannenden Baum und fügen dann schrittweise neue 1-Simplizes hinzu.

Sei $\mathcal{G}$ ein Graph und $\mathcal{T}$ ein aufspannender Baum von $\mathcal{G}$, also $\mathcal{T}$ ein Baum, $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$, $V(\mathcal{T}) = V(\mathcal{G})$. (Dass ein solcher auch für einen unendlichen zusammenhängenden Graphen immer existiert, zeigt man mit Hilfe des

Zornschen Lemma.) Wir wollen einen 1-Simplex hinzufügen, sei also $u_0, u_1 \in V(\mathcal{G})$, $\{u_0, u_1\} \notin \mathcal{G}$, $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \cup \{\{u_0, u_1\}\}$.

Wir wollen nun gerne den Satz von Seifert und van Kampen anwenden. Dazu setzen wir $U_0 := |\mathcal{G}'| \setminus \left\{\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_1\right\}$. Wir können Proposition 9.8 anwenden, um zu sehen, dass die Inklusionsabbildung $|\mathcal{G}| \to U_0$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Wir setzen $X := \operatorname{im} p_{u_0} \cup \operatorname{im} p_{u_1} \cup \operatorname{im} p_{u_0,u_1}$. Es existiert eine offene Teilmenge $U_1 \supset X$ von $|\mathcal{G}'|$, so dass die Inklusion $X \to U_1$ eine Homotopieäquivalenz ist. Beispielsweise kann man für jede Kante $\{w_0, w_1\} \in \mathcal{G}$ mit $w_0 \in X$, $w_1 \notin X$, zu X die Menge $p_{w_0,w_1}[(0, \frac{1}{2})]$ hinzufügen. Ebenso ist dann $U_0 \cap U_1 \simeq X \setminus \left\{\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_1\right\}$ zusammenziehbar. Mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen und der genannten Homotopieäquivalenzen, erhalten wir daher, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\{e\} \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X, v_0) \arrow[d] \\
\pi_1(|\mathcal{G}|, v_0) \arrow[r] & \pi_1(|\mathcal{G}'|, v_0)
\end{tikzcd}$$

ein Push-Out-Diagramm ist, wobei die nicht trivialen Homomorphismen von Inklusionsabbildungen induziert sind. Der Raum X ist homotopieäquivalent zu einer Kreislinie, und $p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1}^-$ repräsentiert einen Erzeuger von $\pi_1(X, v_0)$.

Dies liefert folgendes.

11.12 Proposition. *Sei $\mathcal{G}$ ein endlicher Graph, $\mathcal{T}$ ein aufspannender Baum und $v_0 \in V(\mathcal{G})$. Für jedes $u \in V(\mathcal{G})$ wählen wir einen Weg $p_u \colon I \to |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{G}|$ von v_0 nach u_0. Außerdem bezeichne $p_{u_0,u_1} \colon I \to |\mathcal{G}|$ einen Weg von u_0 nach u_1 in dem 1-Simplex $\{u_0, u_1\}$. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G}$ setzen wir*

$$g_{u_0,u_1} := [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1}^-].$$

Dann ist $g_{u_0,u_1} = g_{u_1,u_0}^{-1}$, und für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ ist $g_{u_0,u_1} = e$.

Wir wählen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{G})$. Dann wird $\pi_1(|\mathcal{G}|, v_0)$ frei von den g_{u_0,u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass es, da $|\mathcal{T}|$ sowie jede Kante zusammenziehbar ist, so dass es egal ist, ob p_{u_0} und p_{u_0,u_1} die konkreten weiter oben konstruierten Wege bezeichnet oder beliebige, die den Bedingungen der Proposition entsprechen.

Für $g_{u_0,u_1} = e$, $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, bemerken wir, dass $p_{u_0} * p_{u_0,u_1}$ in diesem Fall in $|\mathcal{T}|$ verläuft, also homotop relativ $\{0, 1\}$ zu p_{u_1} ist.

Dass $\pi_1(|\mathcal{G}|, v_0)$ frei von den g_{u_0,u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt wird, zeigen wir zunächst für den Fall, dass $\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ endlich ist, durch Induktion über $|\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}|$. Dabei liefert Proposition 11.6 den Induktionsanfang und die obige Diskussion zusammen mit Proposition 11.11 den Induktionsschritt. Der allgemeine Fall folgt daraus mit . Dabei benutzen wir, dass wenn $\mathcal{K}$ ein endlicher Unterkomplex ist, die Behauptung für $familyT \cup \mathcal{K}$ bereits gezeigt ist. ☐

11.13 Notation. Für $k \geq 0$ ist das *k-Skelett* eines Simplizialkomplexes $\mathcal{S}$ der Unterkomplex $\mathcal{S}^{(k)} := \{\sigma \in \mathcal{S} \colon |\sigma| \leq k+1\}$.

Damit sind wir nun bereit, den endgültigen Satz zu formulieren und zu beweisen.

11.14 Satz. *Sei $\mathcal{S}$ ein endlicher zusammenhängender Simplizialkomplex, $\mathcal{T}$ ein aufspannender Baum und $v_0 \in V(\mathcal{S})$. Wir wählen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$. Für jedes $u \in V(\mathcal{S})$ wählen wir einen Weg $p_u \colon I \to |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{S}^{(1)}|$ von v_0 nach u_0. Außerdem bezeichne $p_{u_0,u_1} \colon I \to |\mathcal{S}^{(1)}|$ einen Weg von u_0 nach u_1 in dem Simplex $\{u_0, u_1\}$. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S}$ setzen wir*

$$g_{u_0,u_1} := [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1}^-].$$

Dann ist $g_{u_0,u_1} = e$ für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, die Gruppe $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0)$ wird frei von den g_{u_0,u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt, und die Abbildung

$$\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0) \xrightarrow{j_\#} \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0)$$

ist ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der

$$\left\{ g_{u_0,u_1} g_{u_1,u_2} g_{u_0,u_2}^{-1} \colon \{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}, u_0 < u_1 < u_2 \right\}$$

enthält.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis über die Zahl der Simplizes von Dimension 2 und höher, also über $|\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^{(1)}|$, für den Fall, dass diese endlich ist. Der allgemeine Fall folgt wieder mit Hilfe von Proposition 11 daraus.

Den Induktionsanfang liefert Proposition 11.12.

Für den Induktionsschritt wählen wir ein inklusionsmaximales Simplex $\sigma \in \mathcal{S}$. Dann ist $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus \{\sigma\}$ ein Unterkomplex, und wir haben einleitend gesehen, dass $|\mathcal{S}| \approx |\mathcal{S}'| \cup_{f_\sigma} \Delta^\sigma$. Es sei $|\sigma| = k+1$. Ist $k > 2$, so induziert nach Proposition 9.11 die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(|\mathcal{S}'|) \to \pi_1(|\mathcal{S}|)$. Wir betrachten daher den Fall $k = 2$. Wir setzen $\sigma = \{u_0, u_1, u_2\}$ mit $u_0 < u_1 < u_2$ und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(|\mathcal{S}'|, u_0) \arrow[r] \arrow[d, "h_{p_{u_0}}"', "\cong"] & \pi_1(|\mathcal{S}|, u_0) \arrow[d, "h_{p_{u_0}}"', "\cong"] \\
\pi_1(|\mathcal{S}'|, v_0) \arrow[r, "i_\#"] & \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0).
\end{tikzcd}$$

Nach Proposition 9.12 ist der obere Homomorphismus ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $[p_{u_0,u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2,u_0}]$ enthält. Der untere Homomorphismus $i_\#$ ist daher ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Element

$$\begin{aligned} h_{p_{u_0}}([p_{u_0,u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2,u_0}]) &= [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2,u_0} * p_{u_0}^-] = \\ &= [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1}^- * p_{u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2}^- * p_{u_2} * p_{u_2,u_0} * p_{u_0}^-] = \\ &= [p_{u_0} * p_{u_0,u_1} * p_{u_1}^-] * [p_{u_1} * p_{u_1,u_2} * p_{u_2}^-] * [p_{u_2} * p_{u_2,u_0} * p_{u_0}^-] = \\ &= j'_\#(g_{u_0,u_1} g_{u_1,u_2} g_{u_0,u_2}^{-1}) \end{aligned}$$

enthält, wobei j' die Inklusion $|\mathcal{S}^{(1)}| \to |\mathcal{S}'|$ ist. Ist $j'_\#$ ein Epimorphismus, so ist $j_\# = (i \circ j')_\# = i_\# \circ j'_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $\ker j'_\# \cup \left\{ g_{u_0,u_1} g_{u_1,u_2} g_{u_0,u_2}^{-1} \right\}$ enthält. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung. $\square$