Abschnitt 12

Die Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes

Wir werden nun die Homologiegruppen $H_i(\mathcal{S})$, $i \geq 0$ eines Simplizialkomplexes $\mathcal{S}$ definieren.

Es lohnt sich, einen Moment einen Vergleich mit der Fundamentalgruppe anzustellen. Diese hatten wir für einen Raum (mit Basispunkt) definiert, ohne Bezug auf eine Triangulierung zu nehmen oder auch nur Triangulierbarkeit vorauszusetzen. Im letzten Abschnitt haben wir dann gezeigt, dass sich die Fundamentalgruppe mit Hilfe einer Triangulierung des Raumes bestimmen lässt. Ähnlich kann man Homologiegruppen eines beliebigen Raumes definieren, beispielsweise die *singulären Homologiegruppen* und dann später zeigen, wie sie sich für einen triangulierten Raum aus der Triangulierung berechnen lassen.

Wir werden hier stattdessen den klassischen Weg beschreiten und die *simplizialen Homologiegruppen* eines abstrakten Simplizialkomplexes definieren. Ihre Nützlichkeit entfaltet diese Theorie dann, nachdem man gezeigt hat, dass Simplizialkomplexe mit homöomorphen Realisierungen (in der Tat genügt Homotopieäquivalenz) isomorphe Homologiegruppen haben. Bevor wir dieses Resultat zumindest für endliche Simplizialkomplexe beweisen, werden wir die Spezialfälle $H_0(\mathcal{S})$ und $H_1(\mathcal{S})$ behandeln. Für diese Gruppen werden wir Beschreibungen mit Hilfe der Zusammenhangskomponenten von $|\mathcal{S}|$ beziehungsweise der Fundamentalgruppe von $|\mathcal{S}|$ erhalten.

Definition der Homologiegruppen

Im folgenden sei R ein kommutativer Ring mit 1. Viele der zu definierenden Objekte werden R-Moduln sein. Dabei werden wir hauptsächlich an den Fällen $R = \mathbb{Z}$ und $R = k$, wobei k ein Körper ist, interessiert sein. $\mathbb{Z}$-Moduln sind nichts weiter als abelsche Gruppen, k-Moduln sind k-Vektorräume. An Körpern werden uns hauptsächlich die Fälle $k = \mathbb{Q}$ und $k = \mathbb{Z}_2$ interessieren.

12.1 Definition. Sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex und $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst den freien R-Modul mit Basis

$$\Sigma_k(\mathcal{S}) := \{(v_0, \dots, v_k) \colon \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S},\ |\{v_0, \dots, v_k\}| = k + 1\},$$

das heißt den Modul

$$\bigoplus_{(v_0,\dots,v_k)\in\Sigma_k(\mathcal{S})} R,$$

wobei wir $1 \in R$ aus dem zu $(v_0,\dots,v_k)$ gehörigen Summanden mit $(v_0,\dots,v_k)$ identifizieren. Wir nehmen nun den Quotienten nach dem von allen Elementen der Form $(v_0,\dots,v_k) - \operatorname{sgn}\pi\cdot(v_{\pi(0)},\dots,v_{\pi(k)})$, wobei $\pi \in S(\{0,\dots,k\})$ eine Permutation ist, erzeugten Untermodul:

$$\tilde{C}_k(\mathcal{S}) := \bigoplus_{(v_0,\dots,v_k)\in\Sigma_k(\mathcal{S})} R\big/_{(v_0,\dots,v_k)-\operatorname{sgn}\pi\cdot(v_{\pi(0)},\dots,v_{\pi(k)})}.$$

Wir nennen $\tilde{C}_k(\mathcal{S})$ den *k-ten reduzierten orientierten Kettenmodul* von $\mathcal{S}$. Und Elemente daraus *k-Ketten* (mit Koeffizienten in R). Wir bezeichnen die Klasse von $(v_0,\dots,v_k)$ in $C_k(\mathcal{S})$ mit $\langle v_0,\dots,v_k\rangle$.

Wir setzen außerdem $C_k(\mathcal{S}) := \tilde{C}_k(\mathcal{S})$ für $k \neq -1$ und $C_{-1}(\mathcal{S}) := 0$. Dies sind die *unreduzierten Kettenmoduln.*

12.2 Bemerkung. Es ist also $\langle v_0,\dots,v_k\rangle = \operatorname{sgn}\pi\cdot\langle v_{\pi(0)},\dots,v_{\pi(k)}\rangle$.

12.3 Lemma. *Für $k \in \{-1,0\}$ ist $\tilde{C}_k(\mathcal{S})$ ein freier R-Modul mit Basis $\Sigma_k(\mathcal{S})$.*

Für $k > 0$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ ein k-Simplex ist $\{\langle v_0,\dots,v_k\rangle\colon \{v_0,\dots,v_k\} = \sigma\}$ eine 2-elementige Menge. Die Wahl eines Elementes nennen wir eine Orientierung *von σ. Haben wir für jeden k-Simplex eine solche Orientierung gewählt, so bilden diese eine Basis von $C_k(\mathcal{S})$.* □

12.4 Definition und Proposition. *Für einen abstrakten Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ und $k \geq 0$ ist durch*

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_k\colon \tilde{C}_k(\mathcal{S}) &\to \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{S})\\ \langle v_0,\dots,v_k\rangle &\mapsto \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_k\rangle\end{aligned}$$

eine R-lineare Abbildung definiert. Dabei stehe $\langle v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_k\rangle$ für $\langle v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+i},\dots,v_k\rangle$, der Hut also für das Weglassen eines Eintrages.

Außerdem definieren wir $\mathfrak{d}_k = 0$ für $k < 0$.

Ebenso definieren wir Abbildungen $\mathfrak{d}_k\colon C_k(\mathcal{S}) \to C_{k-1}(\mathcal{S})$, nur dass hier auch $\mathfrak{d}_0 = 0$.

Beweis. Setzen wir $d(v_0,\dots,v_k) := \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_k\rangle$. Wir haben zu zeigen, dass $d(v_{\pi(0)},\dots,v_{\pi(k)}) = \operatorname{sign}\pi\cdot d(\langle v_0,\dots,v_k\rangle)$ für eine beliebige Permutation π. Da die symmetrische Gruppe von Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, genügt es, dies für eine solche nachzurechnen.

Nun ist für $0 \leq r < k$

$$\begin{aligned}
&d(v_0, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \ldots v_k) = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \ldots, v_k \rangle \\
&\qquad + (-1)^r \langle v_0, \ldots, \hat{v}_{r+1}, \ldots, v_k \rangle + (-1)^{r+1} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_r, \ldots, v_k \rangle \\
&\qquad + \sum_{i=r+2}^{k} (-1)^i \langle v_0, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_k \rangle \\
&\quad = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i+1} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots v_k \rangle \\
&\qquad + (-1)^r \langle v_0, \ldots, \hat{v}_{r+1}, \ldots, v_k \rangle + (-1)^{r+1} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_r, \ldots, v_k \rangle \\
&\qquad + \sum_{i=r+2}^{k} (-1)^{i+1} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots v_k \rangle \\
&\quad = -\sum_{i=0}^{k} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots v_k \rangle \\
&\quad = -d(v_0, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

12.5 Proposition. *Für die soeben definierten Abbildungen gilt* $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$.

Beweis. Die trivialen Fälle beiseite lassend berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_k(\mathfrak{d}_{k+1}\langle v_0, \ldots, v_{k+1} \rangle) = \mathfrak{d}_k \left(\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1} \rangle \right) = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \Bigg(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1} \rangle + \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=i+1}^{k+1} (-1)^{j-1} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{k+1} \rangle \Bigg) \\
&\quad = \sum_{0 \leq j < i \leq k+1} (-1)^{i+j} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{k+1} \rangle + \\
&\qquad + \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j-1} \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{k+1} \rangle \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

12.6 Definition. Es sei R ein Ring. Ein *R-Kettenkomplex* $D = (D_*, \mathfrak{d}_*)$ ist eine Familie $(D_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von R-Moduln zusammen mit R-linearen Abbildungen

$\mathfrak{d}_k \colon D_k \to D_{k-1}$, so dass $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Abbildungen $\mathfrak{d}_k$ nennen wir *Randabbildungen*.

12.7 Definition. Es sei D ein R-Kettenkomplex. Wir definieren

$$Z_k(D) = \ker(\mathfrak{d}_k \colon D_k \to D_{k-1}),$$

den Modul der *k-Zykel* und

$$B_k(D) = \operatorname{im}(\mathfrak{d}_{k+1} \colon D_{k+1} \to D_k),$$

den Modul der *k-Ränder*. Da $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$, ist $B_k(D) \subset Z_k(D)$, und wir definieren

$$H_k(D) = Z_k(D)/B_k(D),$$

den k-ten *Homologiemodul* von D.

12.8 Definition. Für einen abstrakten Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ setzen wir $H_k(\mathcal{S}) := H_k(C_*(\mathcal{S}))$ und $\tilde{H}_k(\mathcal{S}) := H_k(\tilde{C}_*(\mathcal{S}))$. Wollen wir betonen, über welchem Ring R wir arbeiten, so schreiben wir $H_k(\mathcal{S}; R)$ beziehungsweise $\tilde{H}_k(\mathcal{S}; R)$.

Wir halten schon einmal folgendes fest, auf das wir später zurückkommen.

12.9 Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Es ist $H_k(\mathcal{S}) \cong \tilde{H}_k(\mathcal{S})$ für $k > 0$, und ist $V(\mathcal{S}) \neq \emptyset$, so ist $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{S}) = 0$ und $H_0(\mathcal{S}) \cong R \oplus \tilde{H}_0(\mathcal{S})$.*

Beweis. Zur Übung. □

Die Homologie eines Simplexes

Wir wollen für $n \geq -1$ mit Δ^n auch den abstrakten Simplizialkomplex $\mathcal{P}(\{0, \ldots, n\})$ bezeichnen und setzen $\mathfrak{d}\Delta^n := \Delta^n \setminus \{\{0, \ldots, n\}\}$. Wie bereits bemerkt ist $|\Delta^n| \approx \Delta^n \approx \mathbb{D}^n$ und $|\mathfrak{d}\Delta^n| \approx \mathfrak{d}\Delta^n \approx \mathbb{S}^{n-1}$.

Da Δ^n für $n \geq 0$ zusammenziehbar ist und die $\tilde{H}_r(\{\emptyset, \{0\}\}) = \tilde{H}_r(\Delta^0) = 0$ für alle r (Nachrechnen!), erwarten wir $\tilde{H}_r(\Delta^n) = 0$ für alle r. Dies ist unser erstes Resultat.

12.10 Proposition. *Sei $\mathcal{S}$ ein Simplizialkomplex und sei $v \in V(\mathcal{S})$, so dass $\sigma \cup \{v\} \in \mathcal{S}$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$. (Wir sagen, $\mathcal{S}$ sei ein Kegel mit Spitze v.) Dann ist $\tilde{H}_r(\mathcal{S}) = 0$ für alle r.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jeder r-Zykel Rand einer $(r+1)$-Kette ist. Dazu definieren wir für alle $r \geq -1$ eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} K_r\colon \tilde{C}_r(\mathcal{S}) &\to \tilde{C}_{r+1}, \\ \langle u_0, \dots, u_r \rangle &\mapsto \begin{cases} \langle v, u_0, \dots, u_r \rangle, & v \notin \{u_0, \dots, u_r\}, \\ 0, & v \in \{u_0, \dots, u_r\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese ist wohldefiniert, da die Definition mit Permutationen verträglich ist.

Wir setzen außerdem $K_r = 0$ für $r < -1$.

Dann gilt für alle $r \in \mathbb{Z}$, dass

$$\mathfrak{d}_{r+1} K_r + K_{r-1} \mathfrak{d}_r = \mathrm{id}_{\tilde{C}_r(\mathcal{S})}.$$

In der Tat haben wir für $r \geq 0$ und $v \notin \{u_0, \dots, u_r\}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} K \langle u_0, \dots, u_r \rangle &= \mathfrak{d} \langle v, u_0, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_r \rangle + \sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+1} \langle v, u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_r \rangle - K \mathfrak{d} \langle u_0, \dots, u_r \rangle. \end{aligned}$$

und für $v = u_j$

$$\begin{aligned} K \mathfrak{d} \langle u_0, \dots, u_r \rangle &= K \mathfrak{d} \langle u_0, \dots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \dots, u_r \rangle \\ &= (-1)^j K \langle u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_r \rangle \\ &= (-1)^j \langle v, u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \dots, u_r \rangle \\ &= \langle u_0, \dots, u_r \rangle - \mathfrak{d} K \langle u_0, \dots, u_r \rangle \end{aligned}$$

und schließlich für $r = -1$

$$\mathfrak{d} K \langle \rangle = \mathfrak{d} \langle v \rangle = \langle \rangle = \langle \rangle - K \mathfrak{d} \langle \rangle.$$

Man mache sich klar, dass obige Rechnung auch für $r = 0$ korrekt war, und wo sie für $C(\mathcal{S})$ an Stelle von $\tilde{C}(\mathcal{S})$ falsch gewesen wäre, beziehungsweise, was dort das Ergebnis gewesen wäre.

Ist also $[c] \in \tilde{H}_r(\mathcal{S})$, das heißt $c \in \tilde{C}_r(\mathcal{S})$ und $\mathfrak{d} c = 0$, so ist $c = \mathfrak{d}_{r+1}(K_r(c)) + K_{r-1}(\mathfrak{d}_r(c)) = \mathfrak{d}_{r+1}(K_r(c))$ ein Rand, also $[c] = 0$. □

12.11 Korollar. $\tilde{H}_r(\Delta^n) = 0$ *für* $n \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}$. □

12.12 Proposition. *Für* $n \geq 0$ *ist*

$$\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \cong \begin{cases} 0, & k \neq n-1, \\ R, & k = n-1, \end{cases}$$

wobei $\tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ *von* $[\mathfrak{d}_n \langle 0, \dots, n \rangle]$ *erzeugt wird.*

Beweis. Für $k < n-1$ ist $\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) = \tilde{H}_k(\Delta^n) = 0$, für $k > n-1$ ist $\tilde{C}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) = 0$, also $\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) = 0$.

Da $\tilde{C}_{n+1}(\Delta^n) = 0$, ist $\tilde{H}_n(\Delta^n) = \ker \mathfrak{d}_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$. Da $\tilde{H}_n(\Delta^n) = 0$, ist also $\mathfrak{d}_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$ injektiv. Da $\tilde{H}_{n-1}(\Delta^n) = 0$, ist $\ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\Delta^n)} = \operatorname{im} \mathfrak{d}_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$.

Da $\tilde{C}_n(\mathfrak{d}\Delta^n) = 0$, ist $\tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n) = \ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)}$. Nun ist $\ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)} = \ker \mathfrak{d}_{n-1}^{\tilde{C}(\Delta^n)}$, also nach dem vorhergehenden $\mathfrak{d}_n \colon \tilde{C}_n(\Delta^n) \to \tilde{Z}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n) = \tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ ein Isomorphismus. $\square$