Abschnitt 13

Kettenabbildungen und Kettenhomotopien

Simpliziale Abbildungen und Kettenabbildungen

Bei der Betrachtung der Fundamentalgruppe war es wesentlich, dass eine stetige Abbildung zwischen Räumen einen Gruppenhomomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen induziert. Da wir Homologie für Simplizialkomplexe definiert haben, betrachten wir eine geeignete Klasse von Abbildungen zwischen ihnen.

13.1 Definition. Es seien $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ abstrakte Simplizialkomplexe. Eine *simpliziale Abbildung* $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ ist eine Funktion $f\colon V(\mathcal{S}) \to V(\mathcal{T})$ mit $f[\sigma] \in \mathcal{T}$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

Wir bemerken, dass die Identität auf $V(\mathcal{S})$ eine simpliziale Abbildung ist, die wir $\mathrm{id}_{\mathcal{S}}$ nennen werden, und dass die Komposition zweier simplizialer Abbildungen wieder eine simpliziale Abbildung ist.

Kettenabbildungen

Wir werden beschreiben, wie eine simpliziale Abbildung lineare Abbildungen zwischen den Homologiegruppen induziert. In einem Zwischnschritt werden wir eine Abbildung zwischen den simplizialen Kettenkomplexen definieren. Die entsprechende Art von Abbildungen definieren wir nun

13.2 Definition. Es seien C, D zwei R-Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $f\colon C \to D$ ist ein System von R-linearen Abbildungen $(f_i\colon C_i \to D_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, so dass

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\partial"] & D_i \arrow[d, "\partial"] \\ C_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & D_{i-1} \end{tikzcd}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ kommutiert.

13.3 Definition und Proposition. *Ist $f\colon C \to D$ eine Kettenabbildung, so definiert*

$$\begin{aligned} H_i(f)\colon H_i(C) &\to H_i(D)\\ [c] &\mapsto [f_i(c)] \end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ eine R-lineare Abbildung.

Beweis. Wir müssen nur sicherstellen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Sei $c \in C_i$ ein Zykel, also $\mathfrak{d}c = 0$. Dann ist $\mathfrak{d}_i(f_i c) = f_{i-1}(\mathfrak{d}_i c) = f_{i-1}(0) = 0$, also ist $f_i(c)$ ein Zykel und repräsentiert ein Element von $H_i(D)$.

Sei $c' \in C_i$ ein weiterer Zykel, $[c'] = [c]$. Dann existert ein $d \in C_{i+1}$, so dass $c' = c + \mathfrak{d}_{i+1}d$. Es ist dann $f_i(c') = f_i(c) + f_i(\mathfrak{d}_{i+1}d) = f_i(c) + \mathfrak{d}_{i+1}(f_{i+1}(d))$, also $[f_i(c')] = [f_i(c)]$. □

13.4 Definition und Proposition. *Es sei $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung. Dann definiert*

$$\begin{aligned} &\tilde{C}_k(f)\colon \tilde{C}_k(\mathcal{S}) \to \tilde{C}_k(\mathcal{T})\\ &\quad \langle u_0, \dots, u_k\rangle \mapsto \begin{cases} \langle f(u_0), \dots, f(u_k)\rangle, & |\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| = k+1,\\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Kettenabbildung $\tilde{C}(f)\colon \tilde{C}(\mathcal{S}) \to \tilde{C}(\mathcal{T})$ und damit lineare Abbildungen $\tilde{H}(f) := H_k(C(f))\colon \tilde{H}_k(\mathcal{S}) \to \tilde{H}_k(\mathcal{T})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Ebenso definieren wir $C(f)\colon C(\mathcal{S}) \to C(\mathcal{T})$, $H(f)\colon H(\mathcal{S}) \to H(\mathcal{T})$.

Beweis. Wir wollen nachrechnen, dass $\tilde{C}(f)$ eine Kettenabbildung ist. Wir haben für $|\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| = k+1$, dass

$$\begin{aligned} f_{k-1}(\mathfrak{d}_k\langle u_0, \dots, u_k\rangle) &= f_{k_1}\left(\sum_i (-1)^i \langle u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k\rangle\right)\\ &= \sum_i (-1)^i \langle f(u_0), \dots, \widehat{f(u_i)}, \dots, f(u_k)\rangle\\ &= \mathfrak{d}_k(f_k(\langle u_0, \dots, u_k\rangle)). \end{aligned}$$

Ist $|\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| < k$, so ist offensichtlich

$$f_{k-1}(\mathfrak{d}_k\langle u_0, \dots, u_k\rangle) = 0 = \mathfrak{d}_k(f_k\langle u_0, \dots, u_k\rangle).$$

Ist $|\{f(u_0), \dots, f(u_k)\}| = k$, so gibt es $j < j'$ mit $f(u_j) = f(u_{j'}) = v$, und für diese erhalten wir

$$\begin{aligned} &f_{k-1}(\mathfrak{d}_k\langle u_0, \dots, u_k\rangle) =\\ &\qquad = f_{k-1}\left((-1)^j\langle u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k\rangle + (-1)^{j'}\langle u_0, \dots, \hat{u}_{j'}, \dots, u_k\rangle\right)\\ &= (-1)^j\langle f(u_0), \dots, f(u_{j-1}), f(u_{j+1}), \dots, f(u_{j'-1}), v, f(u_{j'+1}), \dots, f(u_k)\rangle\\ &+ (-1)^{j'}\langle f(u_0), \dots, f(u_{j-1}), v, f(u_{j+1}), \dots, f(u_{j'-1}), f(u_{j'+1}), \dots, f(u_k)\rangle\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 = \mathfrak{d}_{k-1}(f_k\langle u_0, \dots, u_k\rangle), \end{aligned}$$

da die beiden Summanden durch $j' - j - 1$ Transpositionen ineinander überführt werden, und $(-1)^h(-1)^{j'-j-1} = -(-1)^{j'}$, so dass sie sich wegheben. □

Kettenhomotopien

Wir betrachten nun das algebraische Analogon zur Homotopie zwischen stetigen Abbildungen. Wir beginnen mit Kettenabbildungen, die in diesem Sinne homotop zur Nullabbildung sind.

13.5 Proposition. *Es seien C, D Kettenkomplexe und $(K_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ eine Famile linearer Abbildungen $K_r\colon C_r \to D_{r+1}$. Wir setzen $f_r := \mathfrak{d}_{r+1}K_r + K_{r-1}\mathfrak{d}_r$. Dann ist $f\colon C \to D$ eine Kettenabbildung und $H_r(f) = 0$ für alle r.*

Beweis. Um zu sehen, dass f eine Kettenabbildung ist, berechnen wir

$$\begin{aligned} f_{r-1}\mathfrak{d}_r &= (\mathfrak{d}_r K_{r-1} + K_{r-2}\mathfrak{d}_{r-1})\mathfrak{d}_r = \mathfrak{d}_r K_{r-1}\mathfrak{d}_r + K_{r-2}0 = \mathfrak{d}_r K_{r-1}\mathfrak{d}_r, \\ \mathfrak{d}_r f_r &= \mathfrak{d}_r(\mathfrak{d}_{r+1}K_r + K_{r-1}\mathfrak{d}_r) = 0K_r + \mathfrak{d}_r K_{r-1}\mathfrak{d}_r = \mathfrak{d}_r K_{r-1}\mathfrak{d}_r. \end{aligned}$$

Sei nun $[c] \in H_r(C)$. Dann ist

$$H_r(f)([c]) = [f_r(c)] = [\mathfrak{d}_{r+1}K_r c + K_{r-1}\mathfrak{d}_r c] = [\mathfrak{d}_{r+1}K_r c] = 0,$$

da $\mathfrak{d}c = 0$ und jeder Rand eine triviale Homologieklasse repräsentiert. □

13.6 Beispiel. Bei der Berechnung der reduzierten Homologie eines Kegels $\mathcal{S}$ in Proposition 12.10 haben wir Abbildungen $K_r\colon \tilde{C}_r(\mathcal{S}) \to \tilde{C}_{r+1}$ produziert, so dass $\mathrm{id}_{\tilde{C}(\mathcal{S})} = \mathfrak{d}K + K\mathfrak{d}$. Es folgte, dass $\mathrm{id}_{\tilde{H}_r(\mathcal{S})} = H_r(\mathrm{id}_{\tilde{C}(\mathcal{S})}) = 0$, also $\tilde{H}_r(\mathcal{S}) = 0$.

Kettenabbildungen von C nach D bilden einen R-Modul. Wir haben gerade einen Untermodul von Kettenabbildungen betrachtet, die wir als äquivalent zur Nullabbildung betrachten wollen. Damit ist nun klar, wann wir zwei Kettenabbildungen als äquivalent betrachten werden.

13.7 Definition. Es seien $f, g\colon C \to D$ Kettenabbildungen. Dann ist $f \simeq g$ genau dann, wenn Abbildungen $K_r\colon C_r \to D_{r+1}$ existieren, so das $\mathfrak{d}K + K\mathfrak{d} = g - f$. In diesem Fall heiße K eine *Kettenhomotopie von f nach g* und f und g heißen *kettenhomotop*.

Kettenkomplexe C, D heißen *kettenhomotopieäquivalent*, $C \simeq D$, wenn Kettenabbildungen $f\colon C \to D$, $g\colon D \to C$ mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_D$, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$ existieren. In diesem Fall heißt f eine *Kettenhomotopieäquivalenz*.

13.8 Proposition. *Kettenhomotopie und Kettenhomotopieäquivalenz sind Äquivalenzrelationen. Ist $f\colon C \to D$ eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $H_r(f)\colon H_r(C) \to H_r(D)$ für alle r ein Isomorphismus.*

Beweis. Zur Transitivität der Kettenhomotopie bemerken wir, dass, wenn K eine Kettenhomotopie von f nach g ist und K' eine von g nach h, ihre Summe $K + K'$ eine Kettenhomotopie von f nach h ist.

Um zu sehen, dass Kettenhomotopieäquivalenz transitiv ist, zeigen wir, dass für homotope Kettenabbildungen $f, f' \colon C \to D$ und $h, h' \colon D \to E$ auch $h \circ f \simeq h' \circ f'$ gilt. Dazu sei $f' - f = \mathfrak{d}K + K\mathfrak{d}$ und $h' - h = \mathfrak{d}K' + K'\mathfrak{d}$. Wir setzen $K'' = hK + K'f'$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}K'' + K''\mathfrak{d} &= \mathfrak{d}hK + \mathfrak{d}K'f' + hK\mathfrak{d} + K'f'\mathfrak{d} \\ &= h\mathfrak{d}K + hK\mathfrak{d} + \mathfrak{d}K'f' + K'\mathfrak{d}f' \\ &= h(\mathfrak{d}K + K\mathfrak{d}) + (\mathfrak{d}K' + K'\mathfrak{d})f' \\ &= h(f' - f) + (h' - h)f' = h'f' - hf. \end{aligned}$$

Der Rest folgt dann rein formal wie für Homotopieäquivalenz von Räumen.

Schließlich sei $f \simeq g \colon C \to D$. Wir haben in Proposition 13.5 gesehen, dass dann $H_r(g - f) = 0$. Nun ist H_r aber additiv, also ist $H_r(g) - H_r(f) = H_r(g - f) = 0$. □

13.9 Beispiel. Wir betrachten das Beispiel eines Kegels noch einmal von einem anderen Standpunkt aus. Es sei $\mathcal{S}$ ein Kegel mit Spitze v. Wir definieren K wie zuvor aber auf dem nicht reduzierten Kettenkomplex, also $K_r \colon C_r(\mathcal{S}) \to C_{r+1}(\mathcal{S})$. Dann gilt $\mathfrak{d}_{r+1}K_r + K_{r-1}\mathfrak{d}_r = 0$ für $r > 0$ und $(\mathfrak{d}_1 K_0 + K_{-1}\mathfrak{d}_0)\langle u\rangle = \mathfrak{d}_1(K_0\langle u\rangle) = \langle u\rangle - \langle v\rangle$.

Definieren wir nun simpliziale Abbildungen

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{S} &\to \Delta^0 \\ u &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g \colon \Delta^0 &\to \mathcal{S} \\ 0 &\mapsto v \end{aligned}$$

(man beachte, dass 0 den einzigen 0-Simplex von Δ^0 bezeichnet), so ist zunächst einmal $f \circ g = \mathrm{id}_{\Delta^0}$, also $H(f) \circ H(g) = \mathrm{id}_{H(\Delta^0)}$. Weiter ist nun aber $\mathrm{id}_{C(\mathcal{S})} - C(g \circ f) = \mathfrak{d}K + K\mathfrak{d}$, also $\mathrm{id}_{C(\mathcal{S})} \simeq C(g \circ f)$ und damit auch $H(g) \circ H(f) = \mathrm{id}_{H(\mathcal{S})}$. Damit ist $H_r(f)$ für alle r ein Isomorphismus, also

$$H_r(\mathcal{S}) \cong H_r(\Delta^0) \cong \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ R, & k = 0. \end{cases}$$

Bäume sind azyklisch

Wir wollen nun zeigen, dass ein Baum auch die Homologie eines Punktes hat. Es sei $\mathcal{T}$ ein Baum und $v_0 \in V(\mathcal{T})$.

Ähnlich wie beim Beweis des Satzes, dass Bäume zusammenziehbar sind, wählen wir für jedes $u \in V(\mathcal{T})$ einen Weg von v_0 nach u, dieses Mal in Form von einer 1-Kette: Es gibt eindeutig bestimmte $n \geq 0$ und $w_i \in V(\mathcal{T})$,

$0 \le i \le n$, mit $v_0 = w_0$, $u = w_n$, $\{w_r, w_{r+1}\} \in \mathcal{T}$ und $w_r \ne w_{r'}$ für $0 \le r < r' \le n$. Mit diesen setzen wir

$$K(\langle u \rangle) := \sum_{0 \le r < n} \langle w_r, w_{r+1} \rangle$$

und setzen dies zu einer linearen Abbildung $K \colon \tilde{C}_0(\mathcal{T}) \to \tilde{C}_1(\mathcal{T})$ fort. Zunächst stellen wir

$$\mathfrak{d}(K(\langle u \rangle)) = \sum_{0 \le r < n} (-\langle w_r \rangle + \langle w_{r+1} \rangle) = -\langle w_0 \rangle + \langle w_n \rangle = -\langle v_0 \rangle + \langle u \rangle$$

fest. Außerdem ist für einen 1-Simplex $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ entweder $K\langle u_1 \rangle = K\langle u_0 \rangle + \langle u_0, u_1 \rangle$ oder $K\langle u_0 \rangle = K\langle u_1 \rangle + \langle u_1, u_0 \rangle$. Beide Gleichungen sind aber wegen $[u_1, u_0] = -[u_0, u_1]$ äquivalent, und aufgrund der Linearität folgt

$$c = K(\mathfrak{d}c) \quad \text{für alle } c \in \tilde{C}_1(\mathcal{T}).$$

Definieren wir weiter

$$\begin{array}{cc} K \colon \tilde{C}_{-1}(\mathcal{T}) \to \tilde{C}_0(\mathcal{T}) & \qquad K \colon \tilde{C}_r(\mathcal{T}) \to \tilde{C}_{r+1}(\mathcal{T}), \quad r \notin \{-1, 0\} \\ K\langle\rangle = \langle v_0 \rangle & \qquad Kc = 0, \end{array}$$

so haben wir also

$$\mathfrak{d}K + K\mathfrak{d} = \mathrm{id}_{\tilde{C}(\mathcal{T})}$$

und damit:

13.10 Proposition. *Ist $\mathcal{T}$ ein (nicht leerer) Baum, so ist $\tilde{H}_r(\mathcal{T}) = 0$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.* □