Abschnitt 14

Exakte Sequenzen und H_1

Exakte Sequenzen

14.1 Definition. Eine Sequenz von R-Moduln und R-linearen Abbildungen

$$\cdots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \to \cdots ,$$

die endlich oder unendlich sein kann, ist *exakt bei dem Modul* A_i, wenn $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i-1}$. Sie ist *exakt*, wenn sie bei allen Moduln exakt ist, bei denen das definiert ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

Dass diese Sequnenz exakt ist, bedeutet, dass f injektiv ist, g surjektiv und dass $\ker g = \operatorname{im} f$.

14.2 Definition. Eine Sequenz von R-Kettenkomplexen und R-Kettenabbildungen

$$\cdots \to A^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} A^i \xrightarrow{f^i} A^{i+1} \to \cdots ,$$

heißt *exakt*, wenn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$\cdots \to A_k^{i-1} \xrightarrow{f_k^{i-1}} A_k^i \xrightarrow{f_k^i} A_k^{i+1} \to \cdots ,$$

von R-Moduln und R-linearen Abbildungen exakt ist.

14.3 Lemma. *Sei*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist

$$H_k(A) \xrightarrow{H_k(f)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(g)} H_k(C)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ *exakt.*

Beweis. Da $\operatorname{im} f \subset \ker g$ ist $g \circ f = 0$, also $H_k(g) \circ H_k(f) = H_k(g \circ f) = H_k(0) = 0$, also $\operatorname{im} H_k(f) \subset \ker H_k(g)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & B_{k+1} \arrow[r, "g_{k+1}"] \arrow[d, "\partial"] & C_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & A_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "\partial"] & B_k \arrow[r, "g_k"] \arrow[d, "\partial"] & C_k & \\
0 \arrow[r] & A_{k-1} \arrow[r, "f_{k-1}"] & B_{k-1} & &
\end{tikzcd}$$

Sei $\beta \in \ker H_k(g)$. Es ist $\beta = [b]$, $b \in B_k$, $\partial b = 0$. Da $0 = H_k(g)([b]) = [g_k(b)]$, existiert ein $c \in C_{k+1}$ mit $\partial c = g_k(b)$. Da g_{k+1} surjektiv ist, existiert ein $d \in B_{k+1}$ mit $g_{k+1}(d) = c$. Es ist also $g_k(b - \partial d) = g_k(b) - g_k(\partial d) = g_k(b) - \partial(g_{k+1}(d)) = g_k(b) - \partial c = 0$. Da $\ker g_k \subset \operatorname{im} f_k$, existiert ein $a \in A_k$ mit $f_k(a) = (b - \partial d)$. Es ist $f_{k-1}(\partial a) = \partial(f_k(a)) = \partial(b - \partial d) = \partial b = 0$, und da f_{k-1} injektiv ist, ist $\partial a = 0$. Also ist $[a] \in H_k(A)$ und $H_k(f)([a]) = [f_k(a)] = [b - \partial d] = [b] = \beta$. Das zeigt $\ker H_k(g) \subset \operatorname{im} H_k(f)$. $\square$

14.4 Bemerkung. Beweise durch *Diagrammjagd* wie dieser mögen zunächst abschreckend wirken, sind aber mit etwas Übung meist einfach. Man versuche, den Beweis alleine zu reproduzieren, um sich davon zu überzeugen.

Bei dem letzten Beweis scheinen wir weniger herausbekommen zu haben als wir hineingesteckt haben. Wir brauchten, dass g surjektiv und f injektiv ist, und haben doch nur die Exaktheit der Homologiesequenz in der Mitte erhalten. In der Tat muss beispielsweise $H_k(g)$ nicht surjektiv sein. Ist $[c] \in H_k(C)$, so existiert zwar ein $b \in B_k$ mit $g_k(b) = c$, aber dies muss kein Zykel sein. Wir wissen nur, dass $g_{k-1}(\partial b) = \partial(g_k(b)) = \partial c = 0$. Statt $\partial b = 0$ wissen wir also nur $\partial b \in \operatorname{im} f_{k-1}$. Dies führt zu folgender Definition.

14.5 Definition und Proposition. *Sei*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann definiert

$$\partial_*([g_k(b)]) = [a] \qquad \text{mit } a \in A_{k-1} \text{ und } f_{k-1}(a) = \partial b$$

eine lineare Abbildung

$$\partial_* \colon H_k(C) \to H_{k-1}(A).$$

Beweis. In der Bemerkung vor der Definition haben wir bereits gesehen, dass solche a und b immer existieren. Sobald wir gezeigt haben, dass ∂_* wohldefiniert ist, folgt aus der Linearität von g_k, ∂ und f_{k-1} die von ∂_*. Wir zeigen also die Wohldefiniertheit.

Zunächst einmal ist zu zeigen, dass a ein Zykel ist. Es ist aber $f_{k-2}(\partial a) = \partial f_{k-1}(a) = \partial\partial b = 0$ und f_{k-2} ist injektiv.

Weiter zeigen wir, dass $[a]$ von der Wahl von a und b unabhängig ist. Es seien also zusätzlich a', b' gegeben und $f_{k-1}(a') = \partial b'$, $g_k(b') = g_k(b)$. Dann ist $b - b' \in \ker g_k = \operatorname{im} f_k$. Es sei $d \in A_k$ mit $f_k(d) = b - b'$. Dann ist $f_{k-1}(\partial d) = \partial f_k(d) = \partial(b - b') = f_{k-1}(a - a')$ und, da f_{k-1} injektiv ist, $\partial d = a - a'$, also $[a] = [a']$. □

14.6 Proposition (kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen liefert lange exakte Sequenz in Homologie)**.** *Sei*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist die Sequenz

$$H_k(A) \xrightarrow{H_k(f)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(g)} H_k(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{H_{k-1}(f)} H_{k-1}(B)$$

exakt.

Beweis. Es bleibt die Exaktheit bei $H_k(C)$ und $H_{k-1}(A)$ nachzuprüfen.

Wir beginnen mit der Exaktheit bei $H_k(C)$. Sei $[b] \in H_k(B)$. Dann ist $H_k(g)([b]) = [g_k(b)]$ und $\partial b = 0 = f_{k-1}(0)$, also $\partial_*(H_k(g)([b])) = [0] = 0$. Sei nun $\gamma \in H_k(C)$, $\partial_*(\gamma) = 0$. Dann gibt es ein $d \in A_k$ und ein $b \in B_k$, so dass $\gamma = [g_k(b)]$, $\partial b = f_{k-1}(\partial d)$. Es ist dann $\partial(b - f_k(d)) = \partial b - f_{k-1}(\partial d) = 0$, also repräsentiert $b - f_k(d)$ ein Element $[b - f_k(d)] \in H_k(B)$ und es ist $H_k(g)([b - f_k(d)]) = [g_k(b) - g_k(f_k(d))] = [g_k(b)] = \gamma$.

Nun zur Exaktheit bei $H_{k-1}(A)$. Ist $\alpha \in \operatorname{im} \partial_*$, so ist $\alpha = [a]$ mit $f_{k-1}(a) = \partial b$ für ein $b \in B_k$. Es ist also $H_{k-1}(f)(\alpha) = [f_{k-1}(a)] = [\partial b] = 0$. Sei andererseits $\alpha = [a]$, $H_{k-1}(f)(\alpha) = 0$. Dann existiert ein $b \in B_k$ mit $\partial b = f_{k-1}(a)$. Da $\partial g_k(b) = g_{k-1}(\partial b) = g_{k-1}(f_{k-1}(a)) = 0$, repräsentiert $g_k(b)$ ein Element von $H_k(C)$, und es ist $\partial_*[g_k(b)] = [a] = \alpha$. □

Wieder vergewissere man sich, dass es einfacher ist, den Beweis selbst zu führen als ihn nachzuvollziehen.

Relative Homologie

14.7 Definition und Proposition. *Es sei* (B, ∂^B) *ein Kettenkomplex. Ist* $A_k \subset B_k$ *für alle* k *ein Untermodul und* $\partial_k^B[A_k] \subset A_{k-1}$ *für alle* k*, so ist* (A, ∂^A) *mit* $\partial_k^A := \partial_k^B|_{A_k} \colon A_k \to A_{k-1}$ *ein Kettenkomplex. Wir nennen* A *einen* Unterkomplex *von* B*.*

In dieser Situation ist

$$\begin{aligned} \partial_k^{B/A} \colon B_k/A_k &\to B_{k-1}/A_{k-1} \\ [b] &\mapsto [\partial_k^B(b)] \end{aligned}$$

wohldefiniert, $(B/A, \mathfrak{d}^{B/A})$ *ein weiterer Kettenkomplex und*

$$0 \to A \to B \to B/A \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. □

14.8 Definition (Homologie eines Paares)**.** Ist $\mathcal{K}$ ein abstrakter Simplizialkomplex und $\mathcal{L} \neq \emptyset$ ein Unterkomplex von K, so ist $C(\mathcal{L})$ ein Unterkomplex von $C(\mathcal{K})$ und wir setzen $C(\mathcal{K}, \mathcal{L}) := C(\mathcal{K})/C(\mathcal{L})$ und $H(\mathcal{K}, \mathcal{L}) := H(C(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$.

Wir haben also:

14.9 Proposition (Lange exakte Sequenz eines Paares)**.** *Ist* $\mathcal{K}$ *ein abstrakter Simplizialkomplex und* $\mathcal{L} \neq \emptyset$ *ein Unterkomplex von* K *und* $i\colon \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ *die Inklusionsabbildung (eine simpliziale Abbildung), so sind*

$$H_k(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(\mathcal{K}) \to H_k(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} H_{k-1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{H_{k-1}(i)} H_{k-1}(\mathcal{K})$$

und

$$\tilde{H}_k(\mathcal{L}) \xrightarrow{\tilde{H}_k(i)} \tilde{H}_k(\mathcal{K}) \to H_k(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\tilde{H}_{k-1}(i)} \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{K})$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ *exakt.*

Beweis. Nach Definition von $C(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to C(\mathcal{L}) \to C(\mathcal{K}) \to C(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \to 0,$$

woraus mit Proposition 14.5 die erste lange exakte Sequenz folgt. Für die zweite bemerken wir, dass $\tilde{C}_i(\mathcal{K})/\tilde{C}_i(\mathcal{L}) = C_i(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ für $i \neq -1$ und, da $\tilde{C}_{-1}(\mathcal{L}) \to \tilde{C}_{-1}(\mathcal{K})$ ein Isomorphismus ist, auch

$$\begin{tikzcd}
\tilde{C}_0(\mathcal{L}) \arrow[r, "\tilde{C}_0(i)"] \arrow[d, "\mathfrak{d}"] & \tilde{C}_0(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{d}"] & C_0(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \arrow[d] \\
\tilde{C}_{-1}(\mathcal{L}) \arrow[r, "\tilde{C}_{-1}(i)"] & \tilde{C}_{-1}(\mathcal{K}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativ mit kurzen exakten Reihen ist, also auch

$$0 \to \tilde{C}(\mathcal{L}) \to \tilde{C}(\mathcal{K}) \to C(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \to 0,$$

eine kurze exakte Sequenz ist. □

14.10 Beispiel ($H(\mathfrak{d}\Delta^n)$)**.** Bei der Berechnung von $\tilde{H}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ haben wir die Kettenkomplexe $\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ und $\tilde{C}(\Delta^n)$ verglichen und $\tilde{H}_k(\Delta^n) = 0$ benutzt. Wir können dies nun mit Hilfe der langen exakten Sequenz des Paares $(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n)$ erneut formulieren. Dazu betrachten wir

$$0 = \tilde{H}_{k+1}(\Delta^n) \xrightarrow{q_*} H_{k+1}(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_k(\Delta^n) = 0.$$

Es ist $\operatorname{im} \mathfrak{d}_* = \ker i_*$, und da $i_* = 0$, ist $\mathfrak{d}_*$ surjektiv. Es ist $\ker \mathfrak{d}_* = \operatorname{im} q_*$, und da $q_* = 0$, ist $\mathfrak{d}_a st$ injektiv. Es ist also

$$H_{k+1}(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow[\cong]{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n)$$

ein Isomorphismus.

Nun ist aber

$$C_k(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) = C_k(\Delta^n)/C_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \cong \begin{cases} R, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \cong H_{k+1}(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n) \cong \begin{cases} R, & k+1 = n, \\ 0, & k+1 \neq n \end{cases}$$

wie zuvor. Da $C_n(\Delta^n, \mathfrak{d}\Delta^n)$ von $\langle 0, \ldots, n\rangle$ erzeugt wird und

$$\mathfrak{d}_*([\langle 0, \ldots, n\rangle]) = [\mathfrak{d}\langle 0, \ldots, n\rangle] \in \tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n),$$

erhalten wir auch wieder, dass $\mathfrak{d}\langle 0, \ldots, n\rangle$ den Erzeuger von $\tilde{H}_{n-1}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ repräsentiert.

H_1

Wir wollen nun für einen Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ die erste Homologiegruppe $H_1(\mathcal{S})$ beschreiben und mit $\pi_1(|\mathcal{S}|)$ vergleichen.

Es sei $|\mathcal{S}|$ zusammenhängend und nicht leer. Wir wählen einen aufspannenden Baum $\mathcal{T}$ von $\mathcal{S}^{(1)}$. Da $\tilde{H}_k(\mathcal{T}) = 0$ für alle k folgt unter Benutzung der langen exakten Sequenz des Paares $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$

$$0 = \tilde{H}_k(\mathcal{T}) \to \tilde{H}_k(\mathcal{S}) \to H_k(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \to \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{T}) = 0,$$

dass die Abbildung $\tilde{H}_k(\mathcal{S}) \to H_k(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ für alle k ein Isomorphismus ist. Da $\mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{T}^{(0)}$, ist $C_0(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$, und wir sehen sofort:

14.11 Proposition. *Ist $\mathcal{S}$ ein Simplizialkomplex und $|\mathcal{S}|$ nicht-leer und zusammenhängend, so ist $\tilde{H}_0(\mathcal{S}) = 0$.* □

Aus $C_0(\mathcal{S},\mathcal{T}) = 0$ folgt auch sofort $Z_1(\mathcal{S},\mathcal{T}) = C_(\mathcal{S},\mathcal{T})$. Dieser Modul hat eine Basis, die in Bijektion zu den Kanten von $\mathcal{S}$, die nicht in $\mathcal{T}$ liegen, steht. Andererseits ist $C_2(\mathcal{S},\mathcal{T}) = C_2(\mathcal{S})$, da $\mathcal{T}$ eindimensional ist. Damit haben wir folgendes, wobei wir die Notation so wählen, dass sie parallel zu Satz 11.14 ist.

14.12 Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein Simplizialkomplex, $\mathcal{T}$ ein aufspannender Baum von $\mathcal{S}^{(1)}$. Auf $V(\mathcal{S})$ sei eine totale Ordnung gewählt. Für $u_0, u_1 \in V(\mathcal{S})$, $u_0 \neq u_1$ setzen wir $h_{u_0,u_1} := [\langle u_0, u_1\rangle] \in C_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$. Dann ist $h_{u_0,u_1} = 0$ für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, das System*

$$(h_{u_0,u_1})_{\substack{\{u_0,u_1\}\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{T} \\ u_0<u_1}}$$

eine Basis von $Z_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$, und

$$\{h_{u_0,u_1} + h_{u_1,u_2} - h_{u_0,u_2} \colon \{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}, u_0 < u_1 < u_2\}$$

ein Erzeugendensystem von $B_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$. □

Dies ist völlig analog zu Satz 11.14, nur, für $R = \mathbb{Z}$, mit abelschen Gruppen an Stelle von Gruppen. Daher ist $H_1(\mathcal{S})$ die Abelisierung von $\pi_1(\mathcal{S})$.

14.13 Satz (Der kleine Hurewicz)**.** *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex und $|\mathcal{S}|$ zusammenhängend und nicht-leer. Dann ist $H_1(\mathcal{S};\mathbb{Z})$ isomorph zur Abelisierung von $\pi_1(|\mathcal{S}|, v_0)$,*

$$H_1(\mathcal{S};\mathbb{Z}) \;\cong\; \pi_1(|\mathcal{S}|) \,/\, [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)].$$

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|)$ frei von einem System $(g_{u_0,u_1})_{\{u_0,u_1\}\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{T},u_0<u_1}$ erzeugt wird. Es gibt daher einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|) \to Z_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$ mit $g_{u_0,u_1} \mapsto h_{u_0,u_1}$. Weiter wissen wir, dass die von der Inklusion induzierte Abbildung $j_*\colon \pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|) \to \pi_1(|\mathcal{S}|)$ surjektiv ist und ihr Kern der kleinste Normalteiler ist, der die Elemente $g_{u_0,u_1} g_{u_1,u_2} g_{u_0,u_2}^{-1}$, $u_0 < u_1 < u_2$, $\{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}$ enthält. Ein solches Element wird auf $h_{u_0,u_1} + h_{u_1,u_2} - h_{u_0,u_2} \in B_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$ abgebildet. Daher induziert die Abbildung einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(|\mathcal{S}|) \to Z_1(\mathcal{S},\mathcal{T})/B_1(\mathcal{S},\mathcal{T}) = H_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$ und, da $H_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$ abelsch ist, einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(|\mathcal{S}|) \,/\, [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)] \to H_1(\mathcal{S},\mathcal{T}).$$

Andererseits existiert, da $(h_{u_0,u_1})_{\{u_0,u_1\}\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{T},u_0<u_1}$ eine Basis von $Z_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$ ist und $\pi_1(|\mathcal{S}|) \,/\, [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)]$ eine abelsche Gruppe ist, ein Gruppenhomomorphismus $Z_1(\mathcal{S},\mathcal{T}) \to \pi_1(|\mathcal{S}|) \,/\, [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)]$ mit $h_{u_0,u_1} \mapsto [j_*(g_{u_0,u_1})]$. Da hierbei die Elemente aus $B_1(\mathcal{S},\mathcal{T})$ auf Null abgebildet werden, induziert dieser einen Gruppenhomomorphismus

$$H_1(\mathcal{S},\mathcal{T}) \to \pi_1(|\mathcal{S}|) \,/\, [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)].$$

Nun sind die beiden oben konstruierten Gruppenhomomorphismen offensichtlich invers zueinander. Zusammen mit $H_1(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \cong \tilde{H}_1(\mathcal{S}) = H_1(\mathcal{S})$ folgt die Behauptung. $\square$