Abschnitt 15

Topologische Invarianz der Homologie

Simpliziale Approximation

15.1 Definition. Es sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $v \in V(\mathcal{K})$. Wir nennen den Unterkomplex

$$\overline{\mathrm{st}}\, v := \{\sigma \colon \text{Es existiert } \tau \in \mathcal{K} \text{ mit } v \in \tau \supset \sigma\}$$

den *abgeschlossenen Stern von v*, den Unterkomplex

$$\mathrm{lk}\, v := \{\sigma \in \overline{\mathrm{st}}\, v \colon v \notin \sigma\}$$

den *Link von v* und die Teilmenge

$$\mathrm{st}\, v := |\overline{\mathrm{st}}\, v| \setminus |\mathrm{lk}\, v| \subset |\mathcal{K}|$$

den *offenen Stern von v*.

15.2 Lemma. *Es sei $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex und $u_0, \dots, u_r \in V(\mathcal{K})$. Dann gilt*

$$\bigcap_{k=0}^{r} \mathrm{st}\, u_k \neq \emptyset \iff \{u_0, \dots, u_r\} \in \mathcal{K}.$$

□

15.3 Definition und Proposition. *Es seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ Simplizialkomplexe und $h \colon |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung.*

Eine simpliziale Approximation von *h ist eine Funktion $f \colon V(\mathcal{K}) \to V(\mathcal{L})$, so dass*

$$h[\mathrm{st}\, v] \subset \mathrm{st}\, f(v)$$

für alle $v \in V(\mathcal{S})$.

Eine solche Abbildung f ist automatisch simplizial. Mehr noch, ist g eine weitere simpliziale Approximation von h, so sind f und g benachbart (contiguous)*, das heißt für alle $\sigma \in \mathcal{K}$ ist $f[\sigma] \cup g[\sigma] \in \mathcal{L}$.*

Beweis. Es seien f, g simpliziale Approximationen von h und $\sigma \in \mathcal{K}$. Dann ist

$$\bigcap_{v\in\sigma} \operatorname{st} f(v) \cap \bigcap_{v\in\sigma} \operatorname{st} g(v) \supset \bigcap_{v\in\sigma} h[\operatorname{st} v] \cap \bigcap_{v\in\sigma} h[\operatorname{st} v] \supset h\left[\bigcap_{v\in\sigma} \operatorname{st} v\right] \neq \emptyset,$$

also $f[\sigma] \cup g[\sigma] \in \mathcal{L}$. Dabei haben wir das vorhergehende Lemma verwendet. □

15.4 Proposition. *Ist $\mathcal{K}$ ein Simplizialkomplex, so ist* $\mathrm{id}_{\mathcal{K}}$ *eine simpliziale Approximation von* $\mathrm{id}_{|\mathcal{K}|}$. □

15.5 Proposition. *Sind $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ Simplizialkomplexe, $h\colon |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$, $k\colon |\mathcal{L}| \to |\mathcal{M}|$ stetige Abbildungen mit simplizialen Approximationen $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ und $g\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, so ist $g \circ f$ simpliziale Approximation von $k \circ h$.*

Beweis. Sei $v \in V(\mathcal{K})$, dann ist $(k \circ h)[\operatorname{st} v] = k[h[\operatorname{st} v]] \subset k[\operatorname{st} f(v)] \subset \operatorname{st} g(f(v)) = \operatorname{st}(g \circ f)(v)$. □

15.6 Proposition. *Es seien $f, g\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ zwei benachbarte simpliziale Abbildungen. Dann ist $\tilde{C}(f) \simeq \tilde{C}(g)$ und $C(f) \simeq C(g)$.*

Beweis. Bevor wir die Kettenhomotopie definieren, führen wir ein technisches Hilfsmittel ein. Wir definieren D_k als den freien R-Modul mit Basis $\{(u_0, \dots, u_k)\colon \{u_0, \dots, u_k\} \in \mathcal{L}\}$ und machen diese Moduln durch $\mathfrak{d}(u_0, \dots, u_k) = \sum_i (-1)^i (u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k)$ zu einem Kettenkomplex. Man prüft nun nach, dass

$$\begin{aligned} \gamma_k\colon D_k &\to \tilde{C}_k(\mathcal{L}) \\ (u_0, \dots, u_k) &\to \begin{cases} \langle u_0, \dots, u_k\rangle, & u_i \neq u_j \text{ für } i \neq j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Kettenabbildung definiert. Dazu ist nur nachzuprüfen, dass sich für $u_i = u_j$, $i < j$,

$$\begin{aligned} &\gamma_{k-1}(\mathfrak{d}\langle u_0, \dots, u_k\rangle) = \\ &\quad = (-1)^i \gamma_{k-1}(u_0, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k) + (-1)^j \gamma_{k-1}(u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_k) = 0 \end{aligned}$$

ergibt, da die beiden auftretenden k-Tupel bis auf Reihenfolge gleich sind, und die Permutation, die eines in das andere überführt, Komposition von $j - i - 1$ Transpositionen ist (entsprechend den Einträgen zwischen u_i und u_j) und daher Signum $(-1)^{j-1-1}$ hat. Wir wählen nun eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{K})$ und definieren

$$\begin{aligned} K_k\colon \tilde{C}(\mathcal{K}) &\to D_{k+1} \\ \langle v_0, \dots, v_k\rangle &\mapsto \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (f(v_0), \dots, f(v_i), g(v_i), \dots, g(v_k)), \\ &\qquad\qquad v_0 < v_1 < \dots < v_k. \end{aligned}$$

Eine Rechnung (Übung!) ergibt nun für $v_0 < \cdots < v_k$

$$K_{k-1}(\mathfrak{d}_k\langle v_0,\dots,v_k\rangle) + \mathfrak{d}_{k+1}(K_k(\langle v_0,\dots,v_k\rangle)) = \\ = -(f(v_0),\dots,f(v_k)) + (g(v_0),\dots,g(v_k)),$$

also $\gamma K\mathfrak{d} + \mathfrak{d}\gamma K = \gamma\circ(K\mathfrak{d}+\mathfrak{d}K) = -\tilde{C}(f) + \tilde{C}(g)$, also ist $\gamma\circ K$ eine Kettenhomotopie von $\tilde{C}(f)$ nach $\tilde{C}(g)$. Da $K_{-1} = 0$, ergibt dies ebenso eine Kettenhomotopie von $C(f)$ nach $C(g)$. □

Unterteilungen

15.7 Definition (Baryzentrische Unterteilung)**.** Es sei $\mathcal{K}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Wir definieren einen weiteren Simplizialkomplex

$$\operatorname{sd}\mathcal{K} := \{C \subset \mathcal{K}\setminus\{\emptyset\} : C \text{ endlich, für alle } \tau,\sigma\in C \text{ ist } \sigma\subset\tau \text{ oder } \tau\subset\sigma\},$$

die *baryzentrische Unterteilung von* $\mathcal{K}$.

Es ist also $V(\operatorname{sd}\mathcal{S}) = \mathcal{S}\setminus\{\emptyset\}$. Wir wollen die Ecken der baryzentrischen Unterteilung mit den Baryzentern (Schwerpunkten) der Simplexe des urpsrünglichen Komplexes identifizieren.

15.8 Definition. Für einen Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ und $\tau = \{v_0,\dots,v_k\}\in\mathcal{S}$, $|\tau| = k+1 > 0$, definieren wir das *Baryzentrum*

$$b_\tau := \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{n+1}v \in |\mathcal{S}|$$

von τ.

15.9 Definition und Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein Simplizialkomplex. Dann definiert*

$$\beta\colon |\operatorname{sd}\mathcal{S}| \to |\mathcal{S}|$$
$$\sum_i \lambda_i\tau_i \mapsto \sum_i \lambda_i b_{\tau_i}$$

einen Homöomorphismus.

Beweis. Die Abbildung ist so zu verstehen, dass die linke Seite einen Punkt in dem Simplex $\{\tau_i\}\in\operatorname{sd}\mathcal{S}$ mit affinen Koordinaten (λ_i) bezeichnet. Es ist dann $\bigcup_i \tau_i$ ein Simplex von $\mathcal{S}$ und jedes der b_{τ_i} ein Punkt in diesem Simplex. Damit ist auf jedem Simplex von $\operatorname{sd}\mathcal{S}$ eine stetige Abbildung definiert. Da das Weglassen eines Summanden $\lambda_i b_{\tau_i}$ mit $\lambda_i = 0$ die rechte Seite nicht ändert, passen diese Abbildungen zusammen und definieren eine stetige Abbildung $\beta\colon |\operatorname{sd}\mathcal{S}| \to |\mathcal{S}|$. Wir zeigen nun, dass diese bijektiv ist.

Wir legen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$ fest. Dann hat jeder Punkt $x \in |\mathrm{sd}\,\mathcal{S}|$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \sigma_i$$

$\sigma_i = \{v_0, \dots, v_i\}$, $\lambda_r \neq 0$ und $v_i < v_{i+1}$ falls $\lambda_i = 0$. Für diesen ist dann

$$\beta(x) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i b_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{1+i} v_j = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=j}^{r} \frac{\lambda_i}{i+1} v_j = \sum_{j=0}^{r} \mu_j v_j$$

mit

$$\mu_j := \sum_{i=j}^{r} \frac{\lambda_i}{i+1}.$$

Dabei ist dann $\mu_r \neq 0$, $\mu_i \geq \mu_{i+1}$ und $\mu_i = \mu_{i+1} \iff \lambda_i = 0$. Andererseits hat aber jeder Punkt $y \in |\mathcal{S}|$ eine eindeutige Darstellung

$$y = \sum_{i=0}^{r} \mu_i v_i$$

mit $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_r > 0$ und $u_i < u_{i+1}$ falls $\mu_i = \mu_{i+1}$. Da sich aus den μ_i die λ_i vermöge

$$\lambda_r = (r+1)\mu_r, \qquad \lambda_j = (j+1)(\mu_j - \mu_{j+1}), \quad 0 \leq j < r.$$

zurückgewinnen lassen, ist β eine Bijektion. Man beachte, dass sich aus dieser Rechnung auch ergibt, dass dann

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{1+i} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=j}^{r} \frac{\lambda_i}{i+1} = \sum_{j=0}^{r} \mu_j.$$

Um zu zeigen, dass β ein Homöomorphismus ist, zeigen wir, dass für eine abgeschlossene Menge $A \subset |\mathrm{sd}\,\mathcal{S}|$ auch $\beta[A] \subset |\mathcal{S}|$ abgeschlossen ist. Nun ist der für einen Simplex τ aus $\mathcal{S}$ der von $\beta[A]$ mit diesem Simplex $\beta[A] \cap |\tau| = \bigcup_\sigma \beta[A \cap |\sigma|]$, wobei σ die Simplizes der baryzentrischen Unterteilung von σ durchläuft. Dies ist eine endliche Vereinigung und jede der Mengen $A \cap |\sigma|$ kompakt, also ist $\beta[A] \cap |\tau|$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt und damit abgeschlossen. Also ist $\beta[A]$ abgeschlossen. □

15.10 Definition. Für total geordnetes $V(\mathcal{K})$ definieren wir

$$\begin{aligned} m\colon V(\mathrm{sd}\,\mathcal{K}) &\to V(\mathcal{K}) \\ \tau &\mapsto \min \tau. \end{aligned}$$

15.11 Proposition. *Die Abbildung m ist eine simpliziale Approximation von β.*

Beweis. Es sei $\tau \in V(\operatorname{sd}\mathcal{S})$ und $x \in \operatorname{st}\tau$. Das heißt, $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \sigma_i$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ für alle i, $\sigma_i \in V(\operatorname{sd}\mathcal{S})$, $\sigma_0 \subset \cdots \subset \sigma_k$, und es existiert ein j mit $\tau = \sigma_j$. Dann ist

$$\begin{aligned}\beta(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i b_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \sum_{v\in\sigma_i} \frac{1}{\#\sigma_i} v = \\ = \sum_{v\in\sigma_k} \left(\sum_{i\colon v\in\sigma_i} \frac{\lambda_i}{\#\sigma_i} \right) v \in \operatorname{st} v \quad \text{für alle } v \in \sigma_k,\end{aligned}$$

insbesondere $\beta(x) \in \operatorname{st}(m(\tau))$. □

15.12 Notation. Ist $\{u_0, \ldots, u_k\}$ ein k-Simplex in $\mathcal{K}$ und $\{v, u_0, \ldots, u_k\} \in \mathcal{K}$, so setzen wir

$$v * \langle u_0, \ldots, u_k \rangle := \begin{cases} \langle v, u_0, \ldots, u_k \rangle, & v \neq u_i \text{ f.a. } i, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und setzen dies für $c \in \tilde{C}_k(\mathcal{K})$ linear zu $v * c$ fort, sofern alle Summanden definiert sind.

Wie schon früher bemerken wir:

15.13 Lemma. *Mit dieser Notation gilt $\partial(v * c) = c - v * \partial c$.* □

15.14 Definition und Proposition. *Es sei $\mathcal{K}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Durch $s_{-1}\langle\rangle = \langle\rangle$ und*

$$\begin{aligned} s_k \colon \tilde{C}_k(\mathcal{S}) &\to \tilde{C}_k(\operatorname{sd}\mathcal{S}), \\ \tau &\mapsto b_\tau * s_{k-1}(\partial_k \tau), \end{aligned}$$

wird eine Kettenabbildung $s\colon \tilde{C}(\mathcal{K}) \to \tilde{C}(\operatorname{sd}\mathcal{K})$ definiert.

Beweis. □

In dieser Situation stellen wir nun fest:

15.15 Proposition. *Es ist $\tilde{C}(m) \circ s = \mathrm{id}_{\tilde{C}(K)}$.*

Beweis. □

15.16 Proposition. *Es ist $s \circ \tilde{C}(m) \simeq \mathrm{id}_{\tilde{C}(\operatorname{sd} K)}$ und $s \circ C(m) \simeq \mathrm{id}_{C(\operatorname{sd} K)}$.*

Beweis. □

Der simpliziale Approximationssatz

15.17 Satz. *Es seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ Simplizialkomplexe, $\mathcal{K}$ endlich, und $h\colon |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung. Dann existieren ein $k \geq 0$ und eine simpliziale Approximation $f\colon \operatorname{sd}^k \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ von $h \circ \beta^k$.*

Funktorialität bezüglich stetiger Abbildungen

15.18 Definition. Es seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ Simplizialkomplexe, $\mathcal{K}$ endlich, und $h\colon |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung. Dann definieren wir

$$H(h)\colon H(\mathcal{K}) \to H(\mathcal{L})$$

durch

$$H(h) := H(f) \circ H(s^k),$$

wobei $f\colon \operatorname{sd}^k \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ eine simpliziale Approximation von $h \circ \beta^k$ ist.

15.19 Satz. *$H(h)$ ist wohldefiniert, $H(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, $H(k \circ h) = H(k) \circ H(h)$.*

Auch für nicht endliches $\mathcal{K}$.

15.20 Korollar. *Ist $h\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ein Homöomorphismus, so ist $H(h)\colon H(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} H(\mathcal{L})$ ein Isomorphismus.*

Eine erste Anwendung

15.21 Proposition. *$\mathbb{S}^{n-1}$ ist kein Retrakt von $\mathbb{D}^n$.*

Beweis. Wir gehen wie bei Proposition 4.1, dem Fall $n = 2$, vor, nur dass wir Homologie an Stelle der Fundamentalgruppe benutzen.

Wir ersetzen das Paar $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ durch das homöomorphe Paar $(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|)$, das heißt, wir benutzen diese Triangulierung des n-Balls. Sei $i\colon |\partial\Delta^n| \to |\Delta^n|$ die Inklusionsabbildung, und $r\colon |\Delta^n| \to |\partial\Delta^n|$ eine Retraktionsabbildung, also $r \circ i = \mathrm{id}$. Das heißt, dass das Diagramm von Räumen

$$\begin{tikzcd}
{|\partial\Delta^n|} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{|\partial\Delta^n|}"'] & {|\Delta^n|} \arrow[d, "r"] \\
& {|\partial\Delta^n|}
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Mit Satz 15.19 erhalten wir daraus für $k \in \mathbb{Z}$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_k(\partial\Delta^n) \arrow[r, "\tilde{H}_k(i)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\tilde{H}_k(\partial\Delta^m)}"'] & \tilde{H}_k(\Delta^n) \arrow[d, "\tilde{H}_k(r)"] \\
& \tilde{H}_k(\partial\Delta^n).
\end{tikzcd}$$

Da $\tilde{H}_k(\mathbb{D}^n) = 0$, ist die Komposition $\tilde{H}_k(r) \circ \tilde{H}_k(i) = \mathrm{id}_{\tilde{H}_k(\partial\Delta^n)}$ trivial. Für $k = n - 1$ ergibt sich ein Widerspruch zu $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong R$. □

15.22 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Für $n \geq 0$ hat jede stetige Abbildung $f\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ einen Fixpunkt.*

Beweis. Wie für Satz 4.2, den Fall $n = 2$. $\square$