Abschnitt 16

Homotopieinvarianz, Euler-Charakteristik und mehr

Mehr zu simplizialen Abbildungen

Wir holen zuerst nach, zu beschreiben, wie eine simpliziale Abbildung zwischen Simplizialkomplexen eine stetige Abbildung zwischen den Realisierungen induziert.

16.1 Definition und Proposition. *Es seien $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ abstrakte Simplizialkomplexe und $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung. Dann wird eine stetige Abbildung $|f|\colon |\mathcal{S}| \to |\mathcal{T}|$ dadurch definiert, dass*

$$\begin{tikzcd}
|\mathcal{S}| \arrow[r, "|f|"] & |\mathcal{T}| \\
\Delta^\sigma \arrow[u, "\chi_\sigma^{\mathcal{S}}"'] \arrow[r, "\sum_{v\in\sigma}\lambda_v e_v \mapsto \sum_{v\in\sigma}\lambda_v e_{f(v)}"'] & \Delta^{f[\sigma]} \arrow[u, "\chi_{f[\sigma]}^{\mathcal{T}}"']
\end{tikzcd}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ kommutiert.

Dies verallgemeinert die Konstruktion aus Proposition 10.8, wo f eine Inklusionsabbildung war.

Beweis. Die Abbildung ist eindeutig, da $|\mathcal{S}| = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{S}} \operatorname{im} \chi_\sigma$. Sie ist wohldefiniert, da für $\tau \subset \sigma \in \mathcal{S}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Delta^\sigma \arrow[r, "\sum_{v\in\sigma}\lambda_v e_v \mapsto \sum_{v\in\sigma}\lambda_v e_{f(v)}"'] & \Delta^{f[\sigma]} \arrow[r, "\chi_{f[\sigma]}^{\mathcal{T}}"] & |\mathcal{T}| \\
\Delta^\tau \arrow[u, "i_\tau^\sigma"'] \arrow[r, "\sum_{v\in\tau}\lambda_v e_v \mapsto \sum_{v\in\tau}\lambda_v e_{f(v)}"'] & \Delta^{f[\tau]} \arrow[u, "i_{f[\tau]}^{f[\sigma]}"] \arrow[ur, "\chi_{f[\tau]}^{\mathcal{T}}"'] &
\end{tikzcd} \tag{16.1}$$

kommutiert. Sie ist stetig, da alle Kompositionen $|f| \circ \chi_\sigma$ für $\sigma \in \mathcal{S}$ stetig sind. $\square$

16.2 Proposition. *Es seien $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{K}$ abstrakte Simplizialkomplexe und $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, $g\colon \mathcal{T} \to \mathcal{K}$ simpliziale Abbildungen. Dann gilt:*

(i) f *ist eine simpliziale Approximation von* $|f|$.

(ii) $|g \circ f| = |g| \circ |f|$.

□

16.3 Proposition. *Es seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ abstrakte Simplizialkomplexe, $h\colon |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ eine stetige Abbildung, $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ eine simpliziale Approximation von h. Dann ist $|f| \simeq g$.*

Beweis. Es sei $x \in |\mathcal{K}|$, x im Inneren des Simplexes $\sigma = \{u_0, \dots, u_k\} \in \mathcal{K}$ und $h(x)$ im Inneren des Simplexes $\tau \in \mathcal{L}$. Es ist $h(x) \in \bigcap_i \operatorname{st} f(u_i)$, also ist $f[\sigma] \subset \tau$. Damit ist $|f|(x) \in |\tau|$, und

$$\begin{aligned} H\colon |\mathcal{K}| \times I &\to |\mathcal{L}| \\ (x,t) &\mapsto (1-t) \cdot |f|(x) + t \cdot h(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert. Ist σ ein Simplex von $\mathcal{K}$ und τ ein beliebiger Simplex von $\mathcal{L}$, so ist H offenbar auf der abgeschlossenen Menge $(|\sigma| \cap h^{-1}[|\tau|]) \times I$ stetig. Da das Bild von σ unter h nur endliche viele solcher τ trifft, ist H auf $|\sigma| \times I$ stetig. Damit ist H stetig und Homotopie von $|f|$ nach h. □

Dies können wir nutzen, um folgendes zu zeigen. Man beachte, dass wir den Fall $n = 1$ bereits früher bewiesen haben, er besagt, dass $\mathbb{S}^m$ für $m > 1$ einfach zusammenhängend ist.

16.4 Proposition. *Ist $h\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ stetig und $0 \le n < m$, so ist h homotop zu einer konstanten Abbildung.*

Beweis. Wir identifizieren h mit einer Abbildung $|\partial\Delta^{n+1}| \to |\partial\Delta^{m+1}|$. Aus dem simplizialen Approximationssatz wissen wir, dass ein $k \ge 0$ und eine simpliziale Approximation f von $h \circ \beta^k\colon |\mathrm{sd}^k\, \partial\Delta^{n+1}| \to |\partial\Delta^{m+1}|$ existieren. Nun kann ein Punkt im Inneren eines m-Simplexes von $\partial\Delta^{m+1}$ von $|f|$ nicht getroffen werden. Da aber das Komplement eines Punktes in einer Sphäre zusammenziehbar ist, $|f|$ homotop zu einer konstanten Abbildung, also ebenso die Abbildung $h \circ \beta^k$ und damit auch h, da β^k ein Homöomorphismus ist. □

Homotopieinvarianz

Wir wollen die Homotopieinvarianz der Homologiegruppen zeigen. Da eine Homotopie zwischen zwei Abbildungen von $|\mathcal{S}|$ in einen anderen Raum eine Abbildung von $|\mathcal{S}| \times I$ in diesen Raum ist, wollen wir zunächst $|\mathcal{S}| \times I$ triangulieren. Wir könnten allgemeiner Produkte von Simplizialkomplexen betrachten, aber wir belassen es bei diesem Spezialfall.

16.5 Definition und Proposition. *Es sei $\mathcal{S}$ ein Simplizialkomplex. Auf $V(\mathcal{S})$ sei eine totale Ordnung gewählt. Wir definieren*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\times\Delta^1 := \{\emptyset\} \cup ((\mathcal{S}\setminus\{\emptyset\})\times\{0,1\})\cup\\ \cup\,\{\,\{(v_0,0),\ldots,(v_i,0),(v_i,1),\ldots,(v_k,1)\}:\\ 0\le i\le k, v_0<v_1<\ldots,v_k,\{v_0,\ldots,v_k\}\in\mathcal{S}\}.\end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{S}\times\Delta^1$ ein Simplizialkomplex mit $V(\mathcal{S}\times\Delta^1)=V(\mathcal{S})\times\{0,1\}$. Für $p\in\{0,1\}$ ist

$$\begin{aligned}i_p\colon \mathcal{S}&\to\mathcal{S}\times\Delta^1\\ v&\mapsto(v,p)\end{aligned}$$

eine simpliziale Abbildung, und es existiert ein Homöomorphismus $|\mathcal{S}\times\Delta^1|\approx|\mathcal{S}|\times I$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
|\mathcal{S}| \arrow[dr, "|i_1|"'] \arrow[drr, "x\mapsto(x,1)"] & & \\
& |\mathcal{S}\times\Delta^1| \arrow[r, "\approx"] & |\mathcal{S}|\times I \\
|\mathcal{S}| \arrow[ur, "|i_0|"] \arrow[urr, "x\mapsto(x,0)"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis.

$$\beta\left(\sum_{j=0}^{i}\lambda_i(v_j,0)+\sum_{j=i+1}^{k+1}\lambda_i(v_{j-1},1)\right)=\left(\sum_{j=0}^{k}\mu_j v_j,\rho\right)$$

$$\mu_j=\lambda_j$$

□

Nehmen wir die topologische Invarianz als gegeben hin, so reduziert sich die Homotopieinvarianz auf folgendes Lemma.

16.6 Lemma. *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex. Dann ist*

$$H_k(i_0)=H_k(i_1)\colon H_k(\mathcal{S})\to H_k(\mathcal{S}\times\Delta^1)$$

für alle k und eine beliebige totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$.

Beweis. Wir werden zeigen, dass $C(i_0) \simeq C(i_1)$. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} K_r\colon C_r(\mathcal{S}) &\to C_{r+1}(\mathcal{S} \times \Delta^1) \\ \langle v_0, \dots, v_r \rangle &\mapsto \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \langle (v_0, 0), \dots, (v_s, 0), (v_s, 1), \dots, (v_r, 1) \rangle, \end{aligned}$$

wobei wir $v_0 < \dots < v_k$ annehmen. Wie zuvor erhalten wir

$$\mathfrak{d}_{r+1} K_r + K_{r-1} \mathfrak{d}_r = C_r(i_1) - C_r(i_0),$$

woraus die Behauptung folgt. □

16.7 Proposition. *Es seien $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ Simplizialkomplexe und $f_0, f_1\colon |\mathcal{S}| \to |\mathcal{T}|$ stetige Abbildungen mit $f_0 \simeq f_1$. Dann ist $H_r(f) = H_r(g)\colon H_r(\mathcal{S}) \to H_r(\mathcal{T})$ für alle r.*

Beweis. Sei $h\colon |\mathcal{S} \times \Delta^1| \xrightarrow{\approx} |\mathcal{S}| \times I$ der Homöomorphismus von oben und $F\colon |\mathcal{S}| \times I \to |\mathcal{T}|$ eine Homotopie von f_0 nach f_1. Dann ist $f_0 = F \circ h \circ |i_0|$ und $f_1 = F \circ h \circ |i_1|$. Daher ist $H_r(f_0) = H_r(F \circ h) \circ H_r(|i_0|) = H_r(F \circ h) \circ H_r(i_0) = H_r(F \circ h) \circ H_r(i_1) = H_r(F \circ h) \circ H_r(|i_1|) = H_r(f_1)$. □

16.8 Korollar. *Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist $H(f)$ ein Isomorphismus. Gleiches gilt für $\tilde{H}(f)$.* □

Damit können wir nun endlich zeigen, dass Sphären verschiedener Dimension nicht homotopieäquivalent sind.

16.9 Proposition. *Es seien $n, m \geq -1$. Ist $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^m$, so ist $n = m$.*

Beweis. Wir wissen, dass $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) \neq 0 \iff n = k$. Damit folgt $0 \neq \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_n(\mathbb{S}^m)$ und daraus $n = m$. □

Daraus können wir folgern, dass die Dimension eines euklidischen Räumes eine Homöomorphieinvariante ist.

16.10 Proposition. *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Ist $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$, so ist $n = m$.*

Beweis. Es sei $h\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ ein Homöomorphismus. Dann ist $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx \mathbb{R}^m \setminus \{h(0)\} \simeq \mathbb{S}^{m-1}$, also $n - 1 = m - 1$. □

Die Euler-Charakteristik

Eine Homotopieinvariante von Kettenkomplexen und, aufgrund der topologischen Invarianz der Homologie, von Räumen, die sich aus den Homotopiegruppen ableiten lässt, aber zumindest in Spezialfällen viel älter ist, ist die Euler-Charakteristik.

Um die Algebra zu vereinfachen, nehmen wir an, dass wir über einem Körper $R = k$ arbeiten.

16.11 Proposition. *Es sei C ein Kettenkomplex, so dass $\bigoplus_i C_i$ endlich-dimensional ist. Dann ist*

$$\chi(C) := \sum_i (-1)^i \dim_k C_i = \sum_i (-1)^i \dim_k H_i(C).$$

Beweis. Es ist

$$\dim C_i = \dim \operatorname{im} \partial_i + \dim \ker \partial_i = \dim B_{i-1} + \dim Z_i$$

und

$$\dim H_i(C) = \dim Z_i - \dim B_i,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i \dim C_i &= \sum_i (-1)^i \dim Z_i - \sum_i (-1)^i \dim B_i = \\ &= \sum_i (-1)^i \dim H_i(C). \end{aligned}$$

wie behauptet. □

16.12 Korollar. *Es sei $\mathcal{S}$ ein endlicher Simplizialkomplex und $f_i(\mathcal{S})$ die Zahl der i-Simplizes von $\mathcal{S}$. Dann ist für einen beliebigen Körper k*

$$\chi(\mathcal{S}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i(\mathcal{S}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H_i(\mathcal{S}; k)$$

und

$$\tilde{\chi}(\mathcal{S}) := \sum_{i \geq -1} (-1)^i f_i(\mathcal{S}) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim \tilde{H}_i(\mathcal{S}; k).$$

Beweis. Es ist

$$\dim C_i(\mathcal{S}) = \begin{cases} f_i(\mathcal{S}), & i \geq 0, \\ 0, & i < 0, \end{cases}$$

$$\dim \tilde{C}_i(\mathcal{S}) = \begin{cases} f_i(\mathcal{S}), & i \geq -1, \\ 0, & i < -1, \end{cases}$$

und die Behauptung folgt aus der vorhergehenden Proposition. □

Insbesondere haben wir also, dass $\chi(\mathcal{S})$ eine Homopieinvariante ist: Ist $|\mathcal{S}| \simeq |\mathcal{T}|$, so ist $\chi(\mathcal{S}) = \chi(\mathcal{T})$.