Abschnitt 17

Der Satz vom Igel und mehr

Der Satz vom Igel und verwandte Sätze

Wie schon vorher im eindimensionalen Fall mit Hilfe der Fundamentalgruppe können wir nun mit Hilfe der Homologietheorie den Grad einer Abbildung von einer Sphäre in sich definieren.

17.1 Definition. Es sei $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung. Da $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\deg f \in \mathbb{Z}$, so dass der Homomorphismus $\tilde{H}_n(f)\colon \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \to \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ gleich der Multiplikation mit $\deg f$ ist. Wir nennen diese Zahl den *Grad von f*.

17.2 Proposition. *Es gilt:*

(i) $\deg \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} = 1$.

(ii) $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.

(iii) Ist $f \simeq g$, so ist $\deg f = \deg g$.

□

17.3 Proposition. *Es sei $s\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ Spiegelung an einer Hyperebene durch $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist* $\deg s = -1$.

Beweis. Sei $f\colon \Delta^{n+1} \to \Delta^{n+1}$ die simpliziale Abbildung $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(i) = i$ für $i > 1$. Es gibt einen Homöomorphismus $h\colon \mathbb{S}^n \to |\mathfrak{d}\Delta^{n+1}|$, so dass $h \circ s = |f| \circ h$. Nun ist $\tilde{H}_n(\mathfrak{d}\Delta^{n+1})$ von $a := [\mathfrak{d}\langle 0,\dots,n+1\rangle]$ erzeugt und

$$\begin{aligned} f_*(a) = f_*([\mathfrak{d}\langle 0,\dots,n+1\rangle]) &= [\mathfrak{d}\langle f(0), f(1), f(2),\dots,f(n+1)\rangle] = \\ &= [\mathfrak{d}\langle 1,0,2,\dots,n+1\rangle] = [\mathfrak{d}(-\langle 0,1,2,\dots,n+1\rangle)] = -a. \end{aligned}$$

Also ist $f_*\colon \tilde{H}_n(\mathfrak{d}\Delta^{n+1}) \to \tilde{H}_n(\mathfrak{d}\Delta^{n+1})$ gleich der Multiplikation mit -1, und damit auch $s_*\colon \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \to \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$. □

17.4 Proposition. *Es sei $a_n\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die Antipodenabbildung $a_n(x) = -x$. Dann ist* $\deg a_n = (-1)^{n+1}$.

Beweis. Die Abbildung $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, \dots, -x_{n+1})$ ist Komposition der $n+1$ Spiegelungen $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$. $\square$

17.5 Proposition. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die Antipodenabbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(0) $\chi(\mathbb{S}^n) = 0$.

(i) *n ist ungerade.*

(ii) $a_n \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

(iii) *Es existiert eine Abbildung $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, so dass $f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ und $f(x) \neq x$ für alle x.*

(iv) *Es existiert ein nirgends verschwindendes stetiges Tangentialvektorfeld auf $\mathbb{S}^n$, also eine stetige Abbildung $v \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle x, v(x) \rangle = 0$ und $v(x) \neq 0$ für alle x.*

17.6 Bemerkung. Die Relevanz von (0) wird nur klar, wenn man Verallgemeinerungen einer dieser Aussagen kennt.

Die Implikation $\neg$(i) $\implies$ $\neg$(iv), insbesonder der Spezialfall $n = 2$, ist als Satz vom Igel bekannt und besagt, dass ein solcher sich nicht wirbelfrei kämmen lässt.

Beweis. „(0) $\iff$ (i)“ Es ist $\chi(\mathbb{S}^n) = (-1)^0 + (-1)^n$.

„(ii) $\implies$ (i)“ Ist $a_n \simeq \mathrm{id}$, so ist $(-1)^{n+1} = \deg a_n = \deg \mathrm{id} = 1$.

„(i) $\implies$ (iv)“ Für ungerades n definiert

$$v(x_1, \dots, x_{n+1}) := (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{n+1}, -x_n)$$

ein nirgends verschwindendes Tangentialvektorfeld auf $\mathbb{S}^n$.

Bevor wir die noch ausstehenden Implikationen angehen, bemerken wir, dass zwei Abbildungen $f, g \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ mit $f(x) \neq -g(x)$ für alle x via

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n \times I &\to \mathbb{S}^n \\ (x, t) &\mapsto \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|} \end{aligned}$$

stets homotop sind.

„(iv) $\implies$ (iii)“ Ist v ein nirgends verschwindendes Tangentialvektorfeld, so ist $f(x) := \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ fixpunktfrei, und da x und $v(x)$ linear unabhängig sind, ist nach der Bemerkung $f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.

„(iii) $\implies$ (ii)“ Ist $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpunktfrei, so ist also $f(x) \neq x = -a_n(x)$ für alle x, also nach der Bemerkung $f \simeq a_n$. Ist $f \simeq \mathrm{id}$, so folgt $\mathrm{id} \simeq a_n$. $\square$

In der Tat haben wir gezeigt, dass bis auf Homotopie die Antipodenabbildung die einzige fixpunktfreie Abbildung auf einer Sphäre ist:

17.7 Proposition. *Ist* $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *fixpunktfrei, so ist* $f \simeq a_n$*, also* $\deg f = (-1)^{n+1}$. □

Die Homologie des Produkts eines Raumes mit einer Sphäre

Wir zeigen nun, wie sich für einen triangulierbaren Raum X die Homologiegruppen des Produkts von X mit einer Sphäre aus denen von X ergeben. Dies tun wir einerseits, um mehr Beispiele für Homologiegruppen von Räumen zu haben, andererseits, um typische Argumente kennenzulernen. Außerdem erhalten wir damit, indem wir den Fall eines einpunktigen Raumes X betrachten, eine weitere Art, die Homologie von Sphären zu bestimmen, die nicht von einer konkreten Triangulierung der Sphäre abhängt.

Wir schicken ein paar allgemeine Aussagen voraus.

17.8 Lemma. *Sind* $p\colon L \to M$*,* $i\colon M \to L$ *lineare Abbildungen zwischen* R*-Moduln und* $p \circ i = \mathrm{id}_M$*, so ist* $L \cong M \oplus \ker p$ *via der Isomorphismen*

$$\begin{aligned} L &\cong M \oplus \ker p \\ l &\mapsto p(l) \oplus l - i(p(l)) \\ i(m) + n &\leftarrow m \oplus n, \end{aligned}$$

und weiterhin ist $\operatorname{coker} i := L/\operatorname{im} i \cong (M \oplus \ker p)/M \cong \ker p$. □

Daraus erhält man die folgende Fassung, die in der homologischen Algebra wichtig ist.

17.9 Proposition. *Es sei*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

eine kurze exakte Sequenz von R*-Moduln. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) Es existiert eine lineare Abbildung $s\colon C \to B$*, so dass* $g \circ s = \mathrm{id}_C$.

(ii) Es existiert eine lineare Abbildung $s'\colon B \to A$*, so dass* $s' \circ f = \mathrm{id}_A$.

(iii) Es existiert ein Isomorphismus $B \cong A \oplus C$*, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\cong"] & C \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ A \arrow[r, "a \mapsto a \oplus 0"'] & A \oplus C \arrow[r, "a \oplus c \mapsto c"'] & C \end{tikzcd}$$

kommutiert.

In diesem Fall sagt man, die Sequenz zerfalle.

Beweis. Zur Übung. □

17.10 Proposition (Ausschneidung)**.** *Es sei $\mathcal{S}$ ein abstrakter Simplizialkomplex und $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ Unterkomplexe. Dann gibt es einen von der Inklusion induzierten Isomorphismus*

$$H(\mathcal{K}, \mathcal{K} \cap \mathcal{L}) \xrightarrow{\cong} H(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L}).$$

Beweis. Fassen wir $C(\mathcal{K})$ und $C(\mathcal{L})$ als Unterkettenkomplexe von $C(\mathcal{K} \cup \mathcal{L})$ auf und $C(\mathcal{K} \cap \mathcal{L})$ als Unterkomplex aller, so ist $C(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}) = C(\mathcal{K}) + C(\mathcal{L})$, $C(\mathcal{K} \cap \mathcal{L}) = C(\mathcal{K}) \cap C(\mathcal{L})$ und daher

$$\begin{aligned} C_k(\mathcal{K}, \mathcal{K} \cap \mathcal{L}) = C_k(\mathcal{K})/(C_k(\mathcal{K}) \cap C_k(\mathcal{L})) \cong& \\ \cong (C_k(\mathcal{K}) + C_k(\mathcal{L}))/C_k(\mathcal{L}) &= C_k(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}, \mathcal{L}), \end{aligned}$$

was man auch leicht anhand der Basen sieht, da $(\mathcal{K} \cup \mathcal{L}) \setminus \mathcal{L} = \mathcal{K} \setminus (\mathcal{K} \cap \mathcal{L})$. Diese Isomorphismen bilden einen Isomorphismus von Kettenkomplexen und dieser einen Isomorphismus in Homologie. □

Nun zu dem versprochenen Ergebnis.

17.11 Proposition. *Es sei X ein triangulierbarer Raum und $n \geq 0$. Dann gilt $H_k(X \times \mathbb{S}^n) \cong H_k(X) \oplus H_{k-n}(X)$ für alle k.*

Beweis. Wir wollen zunächst die Aussage verfeinern. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} p_n \colon X \times \mathbb{S}^n &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i_n \colon X &\to X \times \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto (x, y_n) \end{aligned}$$

für ein festes $y_n \in \mathbb{S}^n$. Da $p_n \circ i_n = \mathrm{id}_X$, ist $H_k(p_n) \circ H_k(i_n)) = \mathrm{id}_{H_k(X)}$. Wir wissen daher, dass $H_k(i_n)$ injektiv ist, $H_k(p_n)$ surjektiv, und nach Lemma 17.8, dass

$$\operatorname{coker}\left(H_k(X) \xrightarrow{H_k(i_n)} H_k(X \times \mathbb{S}^n)\right) \cong \ker\left(H_k(X \times \mathbb{S}^n) \xrightarrow{H_k(p_n)} H_k(X)\right)$$

und

$$H_k(X \times \mathbb{S}^n) \cong H_k(X) \oplus \ker H_k(p_n).$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\ker H_k(p_n) \cong H_{k-n}(X),$$

was wir durch vollständige Induktion über n tun wollen. Dafür nehmen wir an, dass wir $X \times \mathbb{S}^n$ so trianguliert haben, dass $X \times \mathbb{D}^n_+$ und $X \times \mathbb{D}^n_-$

Unterkomplexe sind, wobei $\mathbb{D}^n_+$ und $\mathbb{D}^n_-$ die obere und untere Hemisphäre bezeichnen, insbesondere ist also $\mathbb{D}^n_+ \cap \mathbb{D}^n_- = \mathbb{S}^{n-1}$.

Für $n \geq 0$ ist die lange exakte Sequenz des Paares $(X \times \mathbb{S}^n, X \times \mathbb{D}^n_-)$

$$\begin{tikzcd}
H_k(X \times \mathbb{D}^n_-) \arrow[r, "H_k(j)"] & H_k(X \times \mathbb{S}^n) \arrow[r] & H_k(X \times \mathbb{S}^n, X \times \mathbb{D}^n_-) \arrow[r, "\partial_*", "0"'] & H_{k-1}(X \times \mathbb{D}^n_-) \arrow[r, "H_{k-1}(j)"] & . \\
H_k(X) \arrow[u, "\cong", "H_k(r)"'] \arrow[ur, tail, "H_k(i_n)"'] & & & H_{k-1}(X) \arrow[u, "H_{k-1}(r)", "\cong"'] \arrow[ur, tail, "H_{k-1}(i_n)"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei sei j die Inklusionsabbildung und $r(x) = (x, y_n)$ (wir nehmen $y_n \in \mathbb{D}^n_-$ an). Da $j \circ r = i_n$, kommutiert das Dreieck, und da r eine Homotopieäquivalenz ist, ist $H_k(r)$ ein Isomorphismus. Da $H_{k-1}(i_n)$ und damit $H_{k-1}(j)$ injektiv ist, ist $\partial_* = 0$. Außerdem ist $\operatorname{im} H_k(i_n) = \operatorname{im} H_k(j)$ und damit

$$H_k(X \times \mathbb{S}^n, X \times \mathbb{D}^n_-) \cong \operatorname{coker} H_k(j) = \operatorname{coker} H_k(i_n) \cong \ker H_k(p_n).$$

Zusammen mit einem Ausschneidungsisomorphismus haben wir also

$$\ker H_k(p_n) \cong H_k(X \times \mathbb{D}^n_+, X \times \mathbb{S}^{n-1}) \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Der Fall $n = 0$ hiervon liefert bereits den Induktionsanfang, denn $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ und $H(X) \cong H(X \times \mathbb{D}^0, \emptyset)$.

Für $n > 0$ ist die lange exakte Sequenz des Paares $(X \times \mathbb{D}^n_+, X \times \mathbb{S}^{n-1})$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "0"] & H_k(X \times \mathbb{D}^n_+, X \times \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{k-1}(X \times \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "H_{k-1}(j)"] \arrow[dr, two heads, "H_{k-1}(p_{n-1})"'] & H_{k-1}(X \times \mathbb{D}^n_+) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\cong"', "H_{k-1}(q)"] & . \\
& & & H_{k-1}(X) &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist q die Projektionssabbildung und $H(q)$ ein Isomorphismus, da q eine Homotopieäquivalenz ist ($\mathbb{D}^n_+$ ist zusammenziehbar). Die Abbildung j ist eine Inklusionsabbildung und $q \circ j = p_{n-1}$, weshalb das Diagramm kommutiert. Da $H(p_{n-1})$ surjektiv ist, ist auch $H(j)$ surjektiv, was die Nullen im Diagramm rechtfertigt. Damit ist

$$\ker H_{k-1}(p_{n-1}) = \ker H_{k-1}(j) \cong H_k(X \times \mathbb{D}^n_+, X \times \mathbb{S}^{n-1}).$$

Zusammen mit dem vorherigen und der Induktionsannahme $\ker H_k(p_{n-1}) \cong H_{k-n-1}(X)$ für alle k erhalten wir also

$$\ker H_k(p_n) \cong \ker H_{k-1}(p_{n-1}) \cong H_{(k-1)-(n-1)}(X) = H_{k-n}(X)$$

wie gewünscht. $\square$