Abschnitt 18

Zelluläre Homologie und der Satz von Borsuk und Ulam

Zelluläre Homologie

Einfache Beispiele zur Berechnung von Homologiegruppen

Die Projektive Ebene

Der Torus und die Kleinsche Flasche

Der zelluläre Komplex

18.1 Definition. Es sei $\mathcal{K}$ ein Kettenkomplex. Eine *zelluläre Filtrierung* von $\mathcal{K}$ ist eine aufsteigende Folge von Unterkomplexen $\mathcal{K}_{-1} \subset \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots$, so dass $\mathcal{K}_{-1} = \{\emptyset\}$, $\bigcup_i \mathcal{K}_i = \mathcal{K}$ und $H_k(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n-1}) = 0$ für alle $k \neq n \geq 0$.

Im folgenden sei eine solche zelluläre Zerlegung gegeben. Wir wollen sie benutzen, um $H(\mathcal{K})$ einfacher berechnen zu können.

18.2 Proposition. *$H_k(\mathcal{K}_n) \cong H_k(\mathcal{K}_{n+1})$ für $k \notin \{n, n+1\}$.*

18.3 Proposition. *$H_k(\mathcal{K}_n) = 0$ für $k > n$ und $H_k(\mathcal{K}_n) \cong H_k(\mathcal{K})$ für $n > k$.*

Unser Ziel ist also, $H_n(X_{n+1})$ und dazu zunächst $H_n(X_n)$ zu bestimmen.

18.4 Definition. Wir definieren $D_n := H_n(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n+1})$ und $\mathfrak{d}_n \colon D_n \to D_{n-1}$ als die Kompisition $H_n(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n-1}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} H_{n-1}(\mathcal{K}_{n-1}) \to H_{n-1}(\mathcal{K}_{n-1}, \mathcal{K}_{n-2})$.

18.5 Proposition. *Der zelluläre Komplex ist ein Kettenkomplex und $H_n(D) \cong H_n(\mathcal{K})$.*

Die Homologie von projektiven Räumen

Der Satz von Borsuk-Ulam

Wir werden an antipodenerhaltenden Abbildungen zwischen Sphären interessiert sein, also an Abbildungen $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle x, was wir auch als $f \circ a_n = a_m \circ f$ schreiben können. Eine solche Abbildung induziert eine Abbildung $\bar{f} \colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$. Wir wollen diese Untersuchung aber allgemeiner anstellen.

Die $\mathbb{Z}_2$-Homologiesequenz einer zweifachen Überlagerung

Wir wollen einen Raum X zusammen mit einer fixpunktfreien Involution a betrachten, also einer stetigen Abbildung $c\colon X \to X$, so dass $a(x) \neq x$ für alle x und $a^2 = \mathrm{id}_X$. Wir machen einige weitere technische Voraussetzungen. Der Raum X habe eine Triangulierung $\mathcal{X}$, so dass a simplizial ist. Die Fixpunktfreiheit garantiert dann auch $a[\sigma] \cap \sigma \neq \emptyset$ für alle $\sigma \in \S$ (sonst wäre das Baryzentrum $b_{a[\sigma]\cap\sigma}$ ein Fixpunkt von a). Wir wollen die stärkere Eigenschaft $\overline{\mathrm{st}}\, v \cap \overline{\mathrm{st}}\, a(v)$ für alle $v \in V(\mathcal{X})$ annehmen. Diese können wir wenn nötig durch Übergang zur baryzentrischen Unterteilung von $\mathcal{X}$ erzwingen.

Der Satz von Borsuk-Ulam