1. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 1. Für Mengen a, b sei

(i) $\langle a, b \rangle := \{\{a, b\}, \{\{b\}\}\}$,
(ii) $[a, b] := \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Erfüllen diese Mengen die charakteristische Eigenschaft 2.2 des geordneten Paares? (Setze voraus, dass für jede Menge x gilt, dass $x \neq \{\{x\}\}$.)

Aufgabe 2. Beweise oder widerlege, dass für beliebige Klassen C, D gilt:

(i) $\bigcup(C \cup D) = \bigcup C \cup \bigcup D$,
(ii) $\bigcap(C \cap D) = \bigcap C \cap \bigcap D$,
(iii) $\bigcap(C \cup D) = \bigcap C \cap \bigcap D$.

In der folgenden Aufgabe (und einigen weiteren) wollen wir an einfachen Beispielen die Unabhängigkeit einiger Axiome von anderen klären. Dabei benutzen wir informal Begriffe (Struktur, Gültigkeit von Axiomen in einer Struktur) und Mengen, die erst später eingeführt werden.

Ist M eine Menge und ε eine zweistellige Relation auf M, so kann man in der Struktur (M, ε) die Begriffe der Mengenlehre interpretieren: Die Elemente von M sind die „Mengen“ (im Sinne von (M, ε)); für $a, b \in M$ ist a „Element von“ b (im Sinne von (M, ε)), falls $a \, \varepsilon \, b$ (das heißt $(a, b) \in \varepsilon$) gilt.

Beispiel. Sei $M = \{a, b, c\}$ und a, b, c verschieden; sei $\varepsilon = \{(a, b), (a, c)\}$. In (M, ε) ist (Ext) falsch, denn $b \neq c$, aber b, c haben im Sinne von (M, ε) dieselben „Elemente“, nämlich genau a.

Aufgabe 3 (informal)**.** Wir betrachten die Strukturen (M_i, ε_i), $i \in \{0, 1, 2\}$ mit

$$M_0 := \mathbb{Q}, \quad M_1 := \mathbb{N}, \quad M_2 := \{0, 1\}$$

und für $a, b \in M_i$

$$a \, \varepsilon_i \, b :\Longleftrightarrow a < b.$$

Prüfe, ob in diesen Strukturen (Ext), (Aus), (Null), (Pa) gelten. Schließe daraus, dass (Pa) nicht aus den anderen dreien folgt.

Abgabe: am 7. Mai 2001 in der Vorlesung, wenn wir nicht noch etwas anderes vereinbaren.

In der nächsten Aufgabe werden Anwendungen des Ersetzungsaxioms geübt.

Aufgabe 4. Beweise oder widerlege:

(i) Ist $F\colon C \to D$ eine injektive Funktion und C eine echte Klasse, so ist D eine echte Klasse.

(ii) $C \times D$ ist genau dann eine echte Klasse, wenn $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$ und C oder D eine echte Klasse ist.

(iii) Auch ohne Annahme des Potenzmengenaxioms gilt, dass für jede Menge a die Klasse $\{z \subseteq a\colon z \text{ hat höchstens zwei Elemente}\}$ eine Menge ist.