10. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 37. Wir betrachten das leere Vokabular $\tau = \emptyset$, eine τ-Struktur hat also die Form $\mathfrak{A} = (A)$ mit $A \neq \emptyset$.

(i) Für $n \in \omega$ finde Aussagen $\varphi \leq n$, $\varphi = n$, $\varphi \geq n$ über τ, so dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi \leq n \iff |A| \leq n,$$
$$\mathfrak{A} \models \varphi = n \iff |A| = n,$$
$$\mathfrak{A} \models \varphi \geq n \iff |A| \geq n.$$

(ii) Gib eine Theorie T_∞ über τ an, so dass $\operatorname{Mod} T_\infty = \{\mathfrak{A} \colon |A| \geq \omega\}$. Gibt es eine endliche Teilmenge T' von T_∞, so dass $\operatorname{Mod} T' = \operatorname{Mod} T_\infty$?

Aufgabe 38. Sei K ein Körper. Formalisiere die Theorie der K-Vektorräume in dem im Skript in Beispiel (e) nach Definition 2.2 beschriebenen Vokabular $\{0, +\} \cup \{m_k \colon k \in K\}$.

Aufgabe 39. Entscheide mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der angegebenen Formeln Tautologien sind. Entscheide auch, welche der Formeln allgemeingültig sind. Dabei seien r, s, t paarweise verschiedene Relationssymbole, x, y, z paarweise verschiedene Variablen und α eine beliebige Formel.

(i) $rx \wedge \neg rx \to \exists z\, \alpha(z)$,
(ii) $rx \vee \neg rx \to \exists z\, \alpha(z)$,
(iii) $(rx \wedge \forall x(rx \to sx)) \to sx$,
(iv) $x \equiv y \wedge z \equiv y \to x \equiv z$,
(v) $(rxy \to sxy) \to ((sxy \to txy) \to (rxy \to txy))$.

Abgabe: am 9. Juli 2001 in der Vorlesung.

Aufgabe 40.

(i) Sei $K' = (A', R')$ ein Kalkül zum Ableiten von Formeln, das heißt $A' \subseteq Fml$ die Menge der Axiome, R' die Menge der Regeln; es ist also jedes $r \in R'$ von der Form $r = (p, k)$ mit $k \in Fml$, $p \subset_e Fml$. Außerdem sei $f\colon Fml \to 2$ eine Funktion mit

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 1 &\quad \text{für alle } \alpha \in A', \\ \min_{\alpha \in p} f(\alpha) \leq f(k) &\quad \text{für alle } (p, k) \in R'. \end{aligned}$$

Zeige, dass für alle in K' ableitbaren Aussagen α gilt, dass $f(\alpha) = 1$.

(ii) Zeige, dass in dem Kalkül K aus der Vorlesung ohne Substitutionsaxiome die Formel $x \equiv x \to \exists x(x \equiv x)$ nicht ableitbar ist.

(iii) Zeige, dass in dem Kalkül K aus der Vorlesung ohne Existenzregel die Formel $x \equiv x \to \forall y(x \equiv x)$ nicht ableitbar ist.

Anleitung. Für (ii) benutze (i) mit

$$\begin{aligned} f(\alpha) &:= 1 \quad \text{für atomares } \alpha, \\ f(\exists x\, \alpha) &:= 0, \\ f(\neg\alpha) &:= 1 - f(\alpha), \\ f(\alpha \vee \beta) &:= \max(f(\alpha), f(\beta)) \quad \text{für alle } \alpha, \beta. \end{aligned}$$

Für (iii) verfahre ebenso, aber mit $f(\exists x\, \alpha) := 1$.