11. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG CARSTEN SCHULTZ

Definition. Es sei $\tau = (C, F, R, s)$ ein Vokabular und $\mathfrak{A} = (A, z^{\mathfrak{A}})_{z\in\tau}$, $\mathfrak{B} = (B, z^{\mathfrak{B}})_{z\in\tau}$ seien τ-Strukturen. Wir sagen, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien *isomorph*, wenn es eine Bijektion $h\colon A \to B$ mit

$$\begin{aligned} &h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} && \text{für alle } c \in C,\\ &h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{s(f)})) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{s(f)})) && \text{für alle } f \in F,\\ &(a_1, \dots, a_{s(r)}) \in r^{\mathfrak{A}} \iff (h(a_1), \dots, h(a_{s(r)})) \in r^{\mathfrak{B}} && \text{für alle } r \in R, \end{aligned}$$

für alle $a_i \in A$ gibt.

Aufgabe 41. Es sei τ ein Vokabular und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seien isomorphe τ-Strukturen. Zeige dass $\mathfrak{A} \models \alpha \iff \mathfrak{B} \models \alpha$ für alle Aussagen α gilt.

Tipp. Es werden zunächst geeignete Aussagen über Terme und Formeln gezeigt werden müssen.

Aufgabe 42. Wir betrachten das dreielementige Alphabet $\Gamma = \{l, h, t\}$ und den Ableitungskalkül L mit dem einzigen Axiom lh und den Regeln

$$\frac{xh}{xht}, \qquad \frac{lx}{lxx}, \qquad \frac{xhhhy}{xty}, \qquad \frac{xtty}{xy}$$

für alle $x, y \in \Gamma^*$.

(i) Sei $x \in \Gamma^*$. Zeige, dass aus $\vdash_L x$ folgt, dass $x = ly$ für ein $y \in \Gamma^*$.
(ii) Gib zwei (ernsthaft) verschiedene Beweise für lht an.
(iii) Entscheide, ob $\vdash_L lt$.

Bemerkung. Streng genommen passt L nicht zu der Definition eines Kalküls aus der Vorlesung, da hier Worte und keine Formeln abgeleitet werden. Das sollte aber keine Schwierigkeit bereiten.

Aufgabe 43. Zeige, dass der Korrektheitssatz für unseren Kalkül nicht mehr gilt, wenn wir in der Existenzregel $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x\, \alpha \to \beta}$ den Zusatz „x nicht frei in β“ weglassen.

Abgabe: am 16. Juli 2001 in der Vorlesung.

Aufgabe 44.
Es seien α, β Formeln und x, y Variablen. Zeige:

(i) Ist x nicht frei in α, so gilt
$$\vdash \alpha \to \exists x\beta \to \exists x(\alpha \wedge \beta).$$

(ii) Ist y frei für x in α und β, so gilt
$$\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to \exists y(\alpha(x/y)) \to \exists x\beta.$$

Bemerkung. Diese Aufgabe ist mit dem Stoff aus Kapitel 9 zu lösen.