2. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 5.

(i) Zeige, dass für alle Relationen R, S gilt, dass $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(ii) Beweise oder widerlege, dass für alle Funktionen F und alle Klassen A, B gilt, dass $F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$.

(iii) Beweise oder widerlege, dass für alle Funktionen F und alle Klassen A, B gilt, dass $F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$.

(iv) Charakterisiere die Relationen R, für die gilt, dass $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$ für alle Klassen A, B.

Aufgabe 6. Gib einen Beweis dafür an, dass für Mengen a, b auch $a \times b$ eine Menge ist, der ohne das Potenzmengenaxiom auskommt und dafür das Ersetzungsaxiom (und weitere) benutzt.

Tipp. Zeige zunächst, dass $\{x\} \times b$ für Mengen x, b eine Menge ist.

Definition. Sind $(X, <_X)$, $(Y, <_Y)$ total geordnete Klassen, so heißt die durch

$$(a, b) < (c, d) :\Longleftrightarrow a <_X c \text{ oder } (a = c \text{ und } b <_Y d)$$

gegebene Relation $<$ die lexikographische Ordnung auf $X \times Y$.

Aufgabe 7.

(i) Zeige, dass die lexikographische Ordnung wieder eine totale Ordnung (insbesondere also tatsächlich eine Ordnung) ist.

(ii) (informal). Es seien $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ mit ihrer natürlichen Ordnung und Produkte mit der lexikographischen Ordnung versehen.
   (a) Veranschauliche mit Hilfe einer Skizze die Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
   (b) Entscheide, ob $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Abgabe: am 14. Mai 2001 in der Vorlesung.

Aufgabe 8 (informal)**.** Wir definieren eine zweistellige Relation ε auf $\mathbb{N}$ durch

$$l \,\varepsilon\, n :\Longleftrightarrow \text{Es ex. } m \in \mathbb{N} \text{ und } k_j \in \mathbb{N},\ k_1 < \dots < k_m \text{ mit}$$
$$n = \sum_{j=1}^{m} 2^{k_j} \text{ und } l \in \{k_1, \dots, k_m\}.$$

Wie in Aufgabe 3 interpretieren wir in der Struktur $(\mathbb{N}, \varepsilon)$ die Begriffe der Mengenlehre.

(i) Was sind in dieser Struktur die „Elemente" von $58, 18, 17$? Gilt hier $18 \subseteq 58$, $17 \subseteq 58$?
(ii) Überprüfe die Gültigkeit der Axiome (Ext), (Null) und (Pa) in dieser Struktur.

Bemerkung. Dass sich jede natürliche Zahl eindeutig als Summe verschiedener Zweierpotenzen wie in der Definition von ε darstellen lässt, setzen wir als bekannt voraus; dies muss nicht bewiesen werden.