3. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 9. Es seien $(x, <_x)$, $(y, <_y)$ total geordnete Mengen und $<$ die zugehörige lexikographische Ordnung auf $x \times y$.

(i) Zeige, dass $<$ genau dann eine Wohlordnung ist, wenn $<_x$ und $<_y$ Wohlordnungen sind.
(ii) Damit mit $<_x$ und $<_y$ auch $<$ eine Wohlordnung ist, ist es nicht nötig, dass x *und* y Mengen (und keine echten Klassen) sind. Was ist die minmal notwendige Forderung?

Aufgabe 10. Es seien X und Y wohlgeordnete Klassen und Y nicht isomorph zu einem Anfangsstück von X. Konstruiere rekursiv eine streng monotone Funktion $F\colon X \to Y$, so dass $F[X]$ ein Anfangsstück von Y ist.

Bemerkung. Die Existenz einer solchen Funktion wurde bereits in Satz 5.8 gezeigt. In dieser Aufgabe soll nun die Anwendung des Rekursionssatzes geübt und Satz 5.8 nochmals illustriert werden

Aufgabe 11 (informal)**.** Definiere rekursiv eine Funktion

$$a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

mit

$$\begin{aligned} a(0,y) &= y+1 && \text{für alle } y \in \mathbb{N}, \\ a(x+1,0) &= a(x,1) && \text{für alle } x \in \mathbb{N}, \\ a(x+1,y+1) &= a(x, a(x+1,y)) && \text{für alle } x,y \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

indem Du zunächst auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine geeignete Wohlordnung definierst.

Bemerkung. Diese Funktion ist als die *Ackermann-Funktion* bekannt.

Aufgabe 12 (informal)**.** Es sei $(\mathbb{N}, \varepsilon)$ die Struktur aus Aufgabe 8.

(i) Sei $a = 18$. Finde im Sinne von $(\mathbb{N}, \varepsilon)$ die Teilmengen von a, Elemente von Elementen von a, $\mathcal{P}(a)$, $\bigcup a$.
(ii) Überprüfe die Gültigkeit von (Pot) und (Ver) in $(\mathbb{N}, \varepsilon)$.

Bemerkung. Wer mag, der kann sich überlegen, für welche $a \in \mathbb{N}$ sich in diesem Sinne $\mathcal{P}(a)$ besonders leicht beschreiben lässt.

Abgabe: am 21. Mai 2001 in der Vorlesung.