4. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 13.

(i) Sei x eine Menge. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
  (a) x ist transitiv.
  (b) $\bigcup x \subseteq x$.
  (c) $x \subseteq \mathcal{P}(x)$.

(ii) Finde Mengen x, y, so dass x transitiv aber $(x, \in_x)$ keine Wohlordnung und $(y, \in_y)$ Wohlordnung aber y nicht transitiv ist.

Aufgabe 14.

(i) Beweise Lemma 6.7 aus dem Skript.

(ii) Ist $f\colon (X, <) \xrightarrow{\cong} (Y, <)$ ein Isomorphismus von Wohlordnungen, so gilt für die Mostowski-Isomorphismen π_X und π_Y, dass $\pi_X = \pi_Y \circ f$.

Aufgabe 15. Sei $W := \{(x, <)\colon (x, <) \text{ Wohlordnung}\}$ die Klasse aller wohlgeordneten Mengen, O eine Klasse und $Tp\colon W \to O$ surjektiv mit

$$Tp(x, <) = Tp(y, <) \iff (x, <) \cong (y, <)$$

für alle $(x, <), (y, <) \in W$. Auf O definieren wir eine Relation $\prec$ durch

$$\begin{aligned} &Tp((x, <)) \prec Tp((y, <)) \\ &\qquad \iff (x, <) \text{ ist isomorph zu einem echten Anfangsstück von } (y, <) \end{aligned}$$

für $(x, <), (y, <) \in W$. Zeige:

(i) $\prec$ ist wohldefiniert.

(ii) $\prec$ ist eine lineare Ordnung auf O.

Bemerkung. Sobald wir genug über Ordinalzahlen wissen, wissen wir nicht nur, dass eine solche Funktion Tp existiert, sondern auch, dass $\prec$ tatsächlich eine Wohlordnung auf O ist. (Warum?) Diese Aufgabe soll aber ohne die Hilfe von Ordinalzahlen bearbeitet werden.

Abgabe: am 28. Mai 2001 in der Vorlesung.

Aufgabe 16 (informal)**.** Es sei (M, ε) die Struktur aus Aufgabe 8.

(i) Es seien E, E' die durch

$$\begin{aligned} E(x,y) &\iff y = \{x\}\,, \\ E'(y) &\iff \text{es existiert } x \text{ mit } y = \{x\} \end{aligned}$$

gegebenen Eigenschaften und $a \in M$ das Element 25. Gib, wenn sie existieren, an:

(a) Das Element von M, das aus a durch Aussonderung mit E' entsteht.

(b) Das Element von M, das man als Bild von a unter der durch

$$F(x) := \text{das } y \text{ mit } E(x,y)$$

gegebenen Funktion F erhält.

(ii) Entscheide, ob in (M, ε) die Axiome (Ers) und (Aus) gelten.