5. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 17. Es sei X eine Klasse, e eine Menge und ${}^*\colon x \mapsto x^*$ eine Funktion, so dass $(X, e, {}^*)$ die Peanoaxiome erfüllt. Zeige dass $(X, e, {}^*) \cong (\mathbb{N}, 0, {}')$. (Was genau heißt das?) Hierbei bezeichne $'$ die Nachfolgeroperation auf den natürlichen Zahlen, also $n' := n + 1$.

Aufgabe 18. Sei e eine Menge.

(i) Zeige: Ist e endlich und $x \subseteq e$, so ist auch x endlich, und es ist $|x| \leq |e|$.

(ii) Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (a) e ist endlich.

  (b) Es existieren $n \in \mathbb{N}$ und $e \overset{f}{\rightarrowtail} n$.

  (c) Es existieren $m \in \mathbb{N}$ und $m \overset{g}{\twoheadrightarrow} e$.

Definition (Die Ordinalzahloperationen $+$ und $\cdot$). Um Konfusionen in der folgenden Definition zu vermeiden, schreiben wir $\alpha' := \alpha \cup \{\alpha\}$ für den Nachfolger einer Ordinalzahl $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Wir definieren nun durch Rekursion (über die zweite Komponente) Funktionen $+, \cdot\colon \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ durch

$$
\begin{aligned}
\alpha + 0 &:= \alpha, & \alpha \cdot 0 &:= 0, & \\
\alpha + \beta' &:= (\alpha + \beta)', & \alpha \cdot \beta' &:= a \cdot \beta + \alpha, & \\
\alpha + \lambda &:= \sup_{\beta < \lambda} \alpha + \beta, & \alpha \cdot \lambda &:= \sup_{\beta < \lambda} \alpha \cdot \beta & &(\lambda \text{ Limeszahl}).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19. Es seien $(x, <)$, $(y, <)$ wohlgeordnete Mengen und $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$, so dass $(x, <) \cong (\alpha, \in_\alpha)$, $(y, <) \cong (\beta, \in_\beta)$. Zeige:

(i) Es ist $(\alpha+\beta, \in_{\alpha+\beta}) \cong (\{0\} \times x \cup \{1\} \times y, <)$, wobei $<$ die durch $(m, a) < (n, b) \iff m < n \vee (m = n = 0 \wedge a <_x b) \vee (m = n = 1 \wedge a <_y b)$ gegebene Ordnung ist.

(ii) Es ist $(\alpha \cdot \beta, \in_{\alpha \cdot \beta}) \cong (y \times x, <)$, wobei $<$ die lexikographische Ordnung ist.

Bemerkung. Ist $x \cap y = \emptyset$, was man gerne annehmen darf, so kann man $\{0\} \times x \cup \{1\} \times y$ mit $x \cup y$ identifizieren, und die Ordnung $<$ ist dann gerade die, in der x vor y kommt und die eingeschränkt auf x beziehungsweise y die ursprüngliche Ordnungen ergibt.

Abgabe: am 6. Juni 2001 in der Vorlesung.

Aufgabe 20. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$. Zeige:

(i) Es ist $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$, $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$, $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

(ii) Die Gleichungen $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ und $(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ gelten im allgemeinen nicht.

(iii) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, so ist auch $\alpha+\beta \in \mathbb{N}$ und $\alpha\cdot\beta \in \mathbb{N}$.

(iv) Für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ gelten auch die Gleichungen aus (ii).

Tipp. Es mag günstig sein, zu versuchen, möglichst viel auf Induktion zu verzichten und stattdessen die Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabe und Lemma 8.7 aus dem Skript zu benutzen.