7. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MENGENLEHRE“ IM SOMMERSEMESTER 2001

SABINE KOPPELBERG CARSTEN SCHULTZ

Definition. Sei F eine Menge. Wir sagen, F sei eine *Familie von endlichem Charakter*, wenn für jede Menge x gilt, dass

$$x \in F \iff \text{für alle endlichen } e \text{ mit } e \subseteq x \text{ ist } e \in F.$$

Definition. *Tukeys Lemma* ist die folgende Aussage: Jede nicht-leere Familie von endlichem Charakter hat ein (bezüglich der Inklusion) maximales Element.

Aufgabe 25.

(i) Beweise Tukeys Lemma in ZFC.
(ii) Zeige in ZF, dass aus Tukeys Lemma der Basisexistenzsatz für Vektorräume folgt.

Bemerkung. In der Tat ist Tukeys Lemma äquivalent zum Auswahlaxiom. In der Aufgabe wurde Tukeys Lemma wahrscheinlich aus dem Zornschen Lemma gefolgert, aus Tukeys Lemma direkt das Auswahlaxiom zu folgern ist auch nicht schwer.

Aufgabe 26. Seien X ein kompakter topologischer Raum, $X \neq \emptyset$, und $f\colon X \to X$ eine stetige Abbildung. Eine Teilmenge a von X nennen wir *f-invariant*, wenn a nicht-leer und abgeschlossen ist und $f[a] \subseteq a$ gilt. Zeige in ZFC, dass X eine minimal f-invariante Teilmenge, das heißt eine f-invariante Teilmenge, deren echte Teilmengen alle nicht f-invariant sind, besitzt.

Bemerkung. Wer von topologischen Räumen erschreckt wird, darf auch annehmen, dass X ein kompakter metrischer Raum oder notfalls auch eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 27. Seien $\kappa, \kappa', \lambda, \lambda', \mu$ Kardinalzahlen. Zeige:

(i) Es ist $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$.
(ii) Ist $\kappa \leq \kappa'$ und $\lambda \leq \lambda'$, so ist $\kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda'$.

Bemerkung. Dies ist ein Teil von Lemma 12.2 aus dem Skript. Das Lemma und die nachfolgenden Teile des Skripts sind daher nicht zu benutzen.

Aufgabe 28. Zeige, dass die Struktur $(\mathbb{N}, \varepsilon)$ aus Aufgabe 8 isomorph zu $(V_\omega, \in_{V_\omega})$ ist.

Abgabe: am 18. Juni 2001 in der Vorlesung.