10. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 34. Seien X, Y normierte Räume und $T\colon X \to Y$ linear. Entscheide, welche Implikationen zwischen den folgenden Eigenschaften (i) bis (iv), die T besitzen kann, im allgemeinen gelten:

(i) Für alle Folgen (x_n) in X und alle $z \in X$ gilt $x_n \xrightarrow{\sigma} z \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{\sigma} Tz$.
(ii) Für alle Folgen (x_n) in X und alle $z \in X$ gilt $x_n \to z \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{\sigma} Tz$.
(iii) Für alle Folgen (x_n) in X und alle $z \in X$ gilt $x_n \xrightarrow{\sigma} z \Rightarrow Tx_n \to Tz$.
(iv) Für alle Folgen (x_n) in X und alle $z \in X$ gilt $x_n \to z \Rightarrow Tx_n \to Tz$.

Tipp. Es gelten mehr Implikationen, als man zunächst denken könnte. Um das einzusehen, benötigt man eine der Folgerungen aus dem Satz von Banach-Steinhaus.

Aufgabe 35. Wir definieren einen linearen Operator $T\colon \ell^1 \to c_0$ durch $(Tx)_n := \sum_{k\geq n} x_k$.

(i) Zeige, dass dies einen stetigen Operator definiert.
(ii) Wegen $(c_0)' \cong \ell^1$ und $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ kann man den adjungierten Operator T' als Operator von ℓ^1 nach ℓ^∞ auffassen. Beschreibe ihn als solchen explizit.

Zusatzaufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ für alle $x > 0$ gilt. Zeige, dass $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Tipp. Satz von Baire.

FROHE WEIHNACHTEN!

Abgabe: 7. Januar 2003.