12. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 40. Es seien X, Y Banachräume $B\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear. Für alle $x \in X$ und $y \in Y$ seien $B(x, \cdot)$ und $B(\cdot, y)$ stetig. Zeige, dass B stetig ist.

Aufgabe 41. Es seien X, Y Banachräume und $S\colon X \to Y$, $T\colon Y' \to X'$ lineare Abbildungen, so dass $y'(Sx) = (Ty')x$ für alle $x \in X$ und $y' \in Y'$. Zeige, dass S und T beschränkt sind.

Bemerkung. Man könnte sich fragen, ob man die Vollständigkeit wirklich braucht.

Aufgabe 42. Es sei $w \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_w \colon C[0,1] \times C[0,1] &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t)\,dt. \end{aligned}$$

Ist $w(t) = 1$ für alle t, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ das übliche Skalarprodukt.

(i) Gib notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ ein Skalarprodukt ist.
(ii) Wann induzieren $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ und das übliche Skalarprodukt die selbe Topologie auf $C[0, 1]$?
(iii) Wann ist Orthogonalität bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ äquivalent zu Orthogonalität bezüglich des üblichen Skalarproduktes?

Abgabe: 21. Januar 2003.