15. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE CARSTEN SCHULTZ

Diese Aufgaben sind einerseits für diejenigen, die noch Punkte brauchen. Sie geben die Lösungen bitte am Anfang der nächsten Woche ab.

Andererseits entspringen die Aufgaben der Hoffnung, dass sie zum Verständnis des Restes des Stoffes beitragen mögen. Wer sie in diesem Sinne bearbeitet, kann gerne mit Fragen oder zum Vortragen von Lösungen zu mir kommen, auch nach dem Ende der Vorlesungszeit.
Carsten

Zunächst ein paar allgemeine Aufgaben zum Spektrum eines Operators.

Zusatzaufgabe 4. Sei H ein Hilbertraum und $S \in L(H)$ normal. Zeige, dass $\sigma_r(S) = \emptyset$.

Zusatzaufgabe 5. Es sei X ein Banach-Raum und $S \in L(X)$. Zeige:

(i) $\sigma_r(S) \subset \sigma_p(S')$,
(ii) $\sigma_p(S) \subset \sigma_p(S') \cup \sigma_r(S')$.

Zusatzaufgabe 6. Betrachte

$$\begin{aligned} S\colon \ell^1 &\to \ell^1 \\ (x_0, x_1, x_2, \ldots) &\mapsto (0, x_0, x_1, \ldots). \end{aligned}$$

(i) Bestimme Punktspektrum, kontinuierliches Spektrum und Restspektrum von S und S'.
(ii) Ebenso für $S\colon \ell^2 \to \ell^2$.

Zusatzaufgabe 7. Sei $K \subset \mathbb{K}$ kompakt. Zeige, dass ein $T \in L(\ell^2)$ mit $\sigma(T) = K$ existiert.

Tipp. Versuche einen Multiplikationsoperator!

Datum: 4. Februar 2003.

Für die nächsten Aufgaben ist es nützlich, etwas über das Spektrum eines kompakten Operators zu wissen.

Zusatzaufgabe 8. Es sei M ein kompakter Raum (metrisch, wer das möchte), $h \in C(M)$ und

$$\begin{aligned} T_h \colon C(M) &\to C(M), \\ f &\mapsto hf. \end{aligned}$$

(i) Bestimme das Spektrum und die Eigenwerte von T_h.
(ii) Sei $M = [0,1]$. Für welche h ist T_h kompakt?

Zusatzaufgabe 9. Es sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in dem Hilbertraum H, $\lambda \in \ell^\infty$ und $Tx := \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i$.

(i) Zeige, dass ein normaler beschränkter Operator auf H ist.
(ii) Zeige, dass T genau dann kompakt ist, wenn $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
(iii) Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren von T.

Noch eine kleine Spielerei für die, die wissen, was Netzkonvergenz ist.

Zusatzaufgabe 10. Sei X ein normierter Raum, I eine Menge und $x_i \in X$ für alle $i \in I$. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge der endlichen Teilmengen von I, geordnet durch Inklusion, was $\mathcal{F}$ zu einer gerichteten Menge macht. $s_F := \sum_{i\in F} x_i$ definiert daher ein Netz $(s_F)_{F\in\mathcal{F}}$ in X. Zeige, dass die Konvergenz dieses Netzes gerade unbedingte Konvergenz der Reihe $\sum_{i\in I} x_i$ ist.