2. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE CARSTEN SCHULTZ

Definition. Eine Teilmenge K eines $\mathbb{K}$-Vektorraums heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält, wenn also für alle $x, y \in K$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt, dass $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

Aufgabe 4. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p\colon X \to [0,\infty)$ eine Abbildung mit

(i) $p(x) = 0 \iff x = 0$ und
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$.

Zeige, dass p genau dann eine Norm ist, wenn $\{x \in X : p(x) \leq 1\}$ konvex ist.

Notation. Für einen metrischen Raum (M, d), $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$U(x,\varepsilon) := \{y \in M\colon d(x,y) < \varepsilon\},$$
$$B(x,\varepsilon) := \{y \in M\colon d(x,y) \leq \varepsilon\},$$
$$S(x,\varepsilon) := \{y \in M\colon d(x,y) = \varepsilon\}.$$

Aufgabe 5. Zeige für einen normierten Raum X die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) X ist ein Banachraum.
(ii) Für jede Folge (x_n) in X und jede Folge (r_n) positiver reeller Zahlen mit $B(x_0, r_0) \supset B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2) \supset \ldots$ ist $\bigcap_k B(x_k, r_k) \neq \emptyset$.

Aufgabe 6. Sei X der Vektorraum aller Lipschitz-stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Für $x \in X$ setze

$$\|x\|_{\mathrm{Lip}} := |x(0)| + \sup_{s \neq t} \left| \frac{x(s) - x(t)}{s - t} \right|.$$

Zeige:

(i) $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ ist eine Norm, und $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\mathrm{Lip}}$ für alle $x \in X$.
(ii) $(X, \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ ist ein Banachraum.

Aufgabe 7. Zeige:

(i) Für $1 \leq p \leq q < \infty$ gilt $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$ und damit $\ell^q \supset \ell^p$.
(ii) Es ist $\bigcup_{p<\infty} \ell^p \subsetneq c_0$.

Tipp (zu (i)). Betrachte zuerst $\|x\|_p = 1$.

Abgabe: 29. Oktober 2002.