3. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 8. Für $x \in \ell^1$ definieren wir

$$\|x\| := \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} x(k) \right| .$$

(i) Zeige, dass $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.
(ii) Ist $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ein Banachraum?

Definition. Eine Metrik auf einem Vektorraum X heißt *translationsinvariant*, wenn $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ für alle $x, y, z \in X$.

Aufgabe 9. Sei X der Vektorraum aller Folgen in $\mathbb{K}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \min\bigl(2^{-k}, |x(k) - y(k)|\bigr). \end{aligned}$$

d ist eine translationsinvariante Metrik auf X. Die leichte Rechnung muss nicht ausgeführt werden.

(i) Gibt es eine Norm auf X, die die Metrik d induziert?
(ii) Zeige, dass Konvergenz in (X, d) gerade die punktweise Konvergenz ist.
(iii) Ist der Unterraum aller beschränkten Folgen abgeschlossen in (X, d)?

Aufgabe 10. Sei $1 \le p < q < \infty$. Zeige:

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist $L^q[a,b] \subset L^p[a,b]$ und für $f \in L^q[a,b]$ gilt $(b-a)^{1/q}\|f\|_p \le (b-a)^{1/p}\|f\|_q$.
(ii) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein unbeschränktes Intervall, so gilt weder $L^q(I) \subset L^p(I)$, noch $L^q(I) \supset L^p(I)$.

Tipp (zu (i)). Höldersche Ungleichung!

Aufgabe 11. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeige:

(i) Es ist $L^\infty[a,b] \subsetneq \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p[a,b]$.
(ii) Für $f \in L^\infty[a,b]$ und $1 \le p < \infty$ gilt $\|f\|_p \le (b-a)^{1/p}\|f\|_\infty$.
(iii) Für $f \in L^\infty[a,b]$ gilt $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Abgabe: 5. November 2002.