4. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 12. Für $x \in C^1[0,1]$ definieren wir:

$$\|x\|_{\mathrm{a}} := |x(0)| + \|x'\|_\infty \qquad \|x\|_{\mathrm{c}} := \left(\int_0^1 |x(t)|^2\,dt + \int_0^1 |x'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_{\mathrm{b}} := \max\left\{\left|\int_0^1 x(t)\,dt\right|, \|x'\|_\infty\right\}$$

(i) Zeige, dass dadurch drei Normen definiert werden.
(ii) Entscheide, welche dieser Normen zu der Norm $\|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ äquivalent sind.

Bemerkung. Wer sich bei (i) Schreibarbeit ersparen möchte, der darf auf Satz I.3.3 über die Räume $X \oplus_p Y$ vorgreifen und ihn zusammen mit Aufgabe 2 benutzen. Man kann aber auch einfach rechnen.

Definition. Für einen metrischen Raum (M,d) definieren wir den Abstand eines Punktes $x \in M$ von einer Teilmenge $A \subset M$ durch $d(x,A) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}$.

Aufgabe 13. Sei X ein normierter Raum.

(i) Sei $A \subset X$. Zeige:
 (a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x,A) \end{aligned}$$

 ist stetig.
 (b) Es ist $\overline{A} = \{x : d(x,A) = 0\}$.
(ii) Zeige: Ist U ein endlich-dimensionaler echter Unterraum von X, so existiert ein $x \in X$ mit $\|x\| = d(x,U) = 1$.

Bemerkung. Man vergleiche (ii) mit dem Rieszschen Lemma.

Aufgabe 14. Sei X ein normierter Raum, der eine unendliche, abzählbare Basis (im Sinne der linearen Algebra) besitzt. Zeige, dass X kein Banachraum ist.

Tipp. Konstruiere mit Hilfe des Rieszschen Lemmas oder der vorherigen Aufgabe eine absolut konvergente, nicht konvergente Reihe.

Abgabe: 12. November 2002.