5. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE   CARSTEN SCHULTZ

Definition. Sei M ein metrischer (oder topologischer) Raum. Eine Teilmenge $D \subset M$ heißt *diskret*, wenn jedes $x \in D$ eine Umgebung U mit $U \cap D = \{x\}$ besitzt.

Aufgabe 15. Sei M ein metrischer Raum. Zeige:

(i) Ist M separabel und $N \subset M$, so ist N (mit der induzierten Metrik) ebenfalls separabel.

(ii) Besitzt M eine überabzählbare diskrete Teilmenge, so ist M nicht separabel.

Anleitung (zu (i)). Ist $C \subset M$ abzählbar und dicht, so wähle zu jedem $x \in C$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $y \in N$ mit $d(c, y) < 1/n$, falls ein solches existiert. Zeige, dass man derart eine abzählbare dichte Teilmenge von N erhält.

Aufgabe 16. Seien X ein normierter Raum, $x_n, y_n \in X$, $\|x_n - y_n\| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X. Zeige:

(i) $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in X.

(ii) Für metrische Räume an Stelle normierter Räume ist die entsprechende Aussage im allgemeinen falsch.

Aufgabe 17. Ist X ein unendlichdimensionaler separabler normierter Raum, so enthält X eine abzählbare, linear unabhängige, dichte Teilmenge.

Tipp. Nutze das Ergebnis der vorherigen Aufgabe!

Aufgabe 18. Sei X ein normierter Raum und U ein Unterraum von X mit $\dim(X/U) = 1$.

(i) Zeige, dass U entweder abgeschlossen oder dicht ist.

(ii) Sei $q\colon X \to X/U$ die kanonische Abbildung. Sei außerdem $h\colon X/U \to \mathbb{K}$ ein Vektorraumisomorphismus, der ja nach Voraussetzung existiert. Zeige, dass $h \circ q$ genau dann stetig ist, wenn U abgeschlossen ist.

Abgabe: 19. November 2002.