7. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 23. Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix, die wir gleichzeitig als Endomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auffassen, und

$$r(A) := \max\{|\lambda|\colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

(i) Sei $\mathbb{R}^n$ mit einer beliebigen Norm versehen. Zeige dass die Operatornorm von A größer oder gleich $r(A)$ ist.
(ii) Sei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm versehen. Zeige dass die Operatornorm von A gleich $r(A)$ ist.
(iii) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ bezüglich einer beliebigen Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ genau dann gilt, wenn $r(A) < 1$.

Definition. Für eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$ sei $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ der *Träger* von f. Außerdem sei $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{K}$, deren Träger kompakt ist.

Aufgabe 24. Sei $1 \leq p < \infty$.
(i) Zeige, dass $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dicht in $L^p(\mathbb{R})$ liegt.
(ii) Sei $T_s\colon L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ für $s \in \mathbb{R}$ durch $(T_s f)(t) := f(t-s)$ definiert. Dies ist eine isometrischer Isomorphismus.
  (a) Zeige, dass für alle $f \in L^p$ gilt, dass $\lim_{s\to 0} T_s f = f$ (bezüglich der L^p-Norm).
  (b) Zeige, dass $\lim_{s\to 0} T_s = \mathrm{Id}$ (bezüglich der Operatornorm) *nicht* gilt.

Aufgabe 25. Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$. Sei $\bar{T}$ durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\ X/\ker T \arrow[ur, "\bar{T}"'] & \end{tikzcd}$$

definiert. Hierbei sei π die kanonische Projektion und $X/\ker T$ trage die Quotientennorm.
(i) Zeige, dass $\bar{T}$ stetig ist und $\|\bar{T}\| = \|T\|$ gilt.
(ii) Sei T eine Quotientenabbildung. Zeige, dass dann $\bar{T}$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 26. Sei C^1 mit der Norm $\|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ versehen und $U := \{x \in C^1[0,2]\colon x(t) = 0 \text{ für alle } t \leq 1\}$. Zeige, dass $C^1[0,2]/U$ isometrisch isomorph zu $C^1[0,1]$ ist.

Abgabe: 3. Dezember 2002.