8. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS" IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 27. Wie in Aufgabe 20 definieren wir für $z \in \ell^\infty$ durch punktweise Multiplikation mit z den Operator $T_z \in L(\ell^p)$. Zeige, dass T_z genau dann kompakt ist, wenn z eine Nullfolge ist.

Aufgabe 28. Zeige, dass die durch die Inklusion gegebene Abbildung $(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ kompakt ist.

Tipp. Benutze Arzelà-Ascoli!

Aufgabe 29. Sei X ein Banachraum und $T \in K(X)$. Zeige:

(i) Der Kern von $\mathrm{Id} - T$ ist endlichdimensional.
(ii) Ist $\mathrm{Id} - T$ bijektiv, so ist $(\mathrm{Id} - T)^{-1}$ stetig.
(iii) Ist X unendlichdimensional, so ist $d(\mathrm{Id}, K(X)) = 1$.

Bemerkung (zu (ii)). Dies muss man sich nicht als Eigenschaft kompakter Operatoren merken, denn wir werden später sehen, dass in der Tat jeder bijektive beschränkte Operator zwischen Banachräumen invertierbar ist.

Tipp (zu (iii)). Man benutze die Neumannsche Reihe zu $\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - K)$.

Aufgabe 30. Da $\lim\colon c \to \mathbb{R}$ ein stetiges Funktional ist, folgt aus dem Satz von Hahn-Banach sofort, dass eine stetige Fortsetzung $\mathrm{LIM}\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ von lim existiert. Zeige durch geschicktere Anwendung des Satzes von Hahn-Banach, dass diese sogar so gewählt werden kann, dass sie zusätzlich die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es ist $\liminf x_i \leq \mathrm{LIM}\, x \leq \limsup x_i$ für alle $x \in \ell^\infty$.
(ii) Ist $x_i \geq 0$ für alle i, so ist $\mathrm{LIM}\, x \geq 0$.
(iii) Es ist $\mathrm{LIM}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \mathrm{LIM}(x_2, x_3, x_4, \dots)$ für alle $x \in \ell^\infty$.
(iv) Es ist $\|\mathrm{LIM}\| = 1$.

Tipp. Erinnere, dass

$$\liminf_i x_i \leq \liminf_n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \limsup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \limsup_i x_i,$$

und zeige, dass $p(x) := \limsup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$ ein sublineares Funktional ist.

Bemerkung. Die Fassung dieser Aufgabe im Werner und die dort vorgeschlagene erste Lösungsvariante sind sicherlich eleganter.

Abgabe: 10. Dezember 2002.