9. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „EINFÜHRUNG IN DIE FUNKTIONALANALYSIS“ IM WINTERSEMESTER 2002/2003

STEFAN GESCHKE CARSTEN SCHULTZ

Definition. Für einen Unterraum U eines normierten Raumes X setzen wir $U^\perp := \{x' \in X' \colon x'(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$.

Aufgabe 31. Seien X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeige:

(i) Es existiert ein isometrischer Isomorphismus $(X/U)' \cong U^\perp$.
(ii) Es existiert ein isometrischer Isomorphismus $X'/U^\perp \cong U'$.
(iii) Ist $x \in X \setminus U$, so existiert $x' \in U^\perp$ mit $\|x'\| \leq 1$ und $x'(x) = d(x, U)$.

Definition. Sei A eine Teilmenge des normierten Raumes X. Wir nennen A *absorbierend*, falls $\bigcup_{\lambda>0} \lambda A = X$.

Aufgabe 32. Es sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ eine absorbierende konvexe Teilmenge und p_K das zugehörige Minkowsi-Funktional. Zeige:

(i) Ist $\lambda \geq 0$ und $x, y \in X$ mit $x - y \in \lambda K \cap (-\lambda)K$, so ist $|p_K(x) - p_K(y)| \leq \lambda$.
(ii) Es ist $K \subset p_K^{-1}[[0,1]] \subset \overline{K}$ und $\operatorname{int} K \subset p_K^{-1}[[0,1)] \subset K$.
(iii) Ist p_K stetig, so ist $\overline{K} = p_K^{-1}[[0,1]]$ und $\operatorname{int} K = p_K^{-1}[[0,1)]$.
(iv) p_K ist genau dann stetig, wenn $0 \in \operatorname{int} K$.

Definition. Eine auf einer konvexen Menge definierte Funktion $f \colon K \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* (bzw. *konkav*, bzw. *affin*), wenn für alle $x, y \in K$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt, dass $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ (bzw. $\geq$, bzw. $=$).

Aufgabe 33. Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konkave stetige Funktion und $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe stetige Funktion, und es gelte $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass eine affine stetige Funktion $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert.

Tipp. Betrachte $\{(x, r) \colon r < f(x)\}$ und $\{(x, r) \colon r > g(x)\}$.

Zusatzaufgabe 1. Es sei X ein normierter Raum und $K \subset X$ eine absorbierende konvexe Teilmenge. Ist dann notwendigerweise $0 \in \operatorname{int} K$?

Abgabe: 17. Dezember 2002.