1. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „FUNKTIONENTHEORIE“ IM SOMMERSEMESTER 2011

CARSTEN SCHULTZ, CHRISTOPHER WULFF

Zunächst ein paar Fingerübungen: Die Art von Problemen, die man sich auch selbst stellt, wenn man versucht, neuen Stoff zu lernen. Wir schlagen vor, dass Sie vor ihrem ersten Übungsbesuch schon getestet haben, ob Sie diese problemlos lösen können. Falls nicht, haben Sie für dort Diskussionsstoff. Diese Aufgaben sind aber nicht abzugeben.

Vorbereitungsaufgabe 1. Zeigen Sie direkt aus der Definition der komplexen Ableitung (Differentialquotient), dass für eine komplex differenzierbare Funktion f

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) = i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy)$$

gilt. (Hierbei bezeichnen x und y natürlich reelle Variablen.) Zeigen Sie weiterhin, dass dies äquivalent zu den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen ist.

Vorbereitungsaufgabe 2. Schreiben Sie die folgenden Funktionen f als $f = u + iv$, berechnen Sie die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y und entscheiden Sie mit Hilfe der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen, ob sie holomorph sind. Vergleichen Sie das mit dem, was Sie schon wussten oder vermuteten. Vergewissern Sie sich, dass für die holomorphen Funktionen $f' = u_x + iv_x$ gilt.

$$f(z) = z^2 \qquad f(z) = |z|^2$$

$$f(z) = z^{-1} \qquad f(x+iy) = e^x \cos y + i(e^x + \sin y)$$

$$f(x+iy) = x$$

Nun die regulären Aufgaben, deren Abgabe wir empfehlen. Wie für die Vorlesung haben wir uns auch hier teils bei Jänich bedient.

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der komplexen Sinus- und Cosinusfunktion. Dabei können Sie neben den Eigenschaften, die sich direkt aus den Potenzreihen ergeben und die wir bereits in der Vorlesung besprochen haben, alles benutzen, was Sie über diese Funktionen und die Exponentialfunktion im Reellen wissen.

(i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(ii) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ und $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(iii) Sinus und Cosinus haben nur reelle Nullstellen.
(iv) Gleichmäßig in x gilt

$$\lim_{t\to\pm\infty} |\cos(x+it)| = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\pm\infty} |\sin(x+it)| = \infty.$$

Abgabe: bis zum 11. Mai.

Aufgabe 2. Berechnen Sie mit

$$\begin{aligned}\gamma\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{C}\\ t &\mapsto \exp(it)\end{aligned}$$

das Integral

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz.$$

Lassen Sie sich von der länglichen Diskussion mit Bildern in der Vorlesung nicht verwirren: Dies ist ein Einzeiler.

Folgern Sie, dass $\frac{1}{z}$ keine auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definierte Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 3. Für reell stetig partiell differenzierbare Funktionen $f\colon U\to\mathbb{C}$ definieren wir $\frac{\partial}{\partial z}f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}f - i\frac{\partial}{\partial y}f\right)$, kurz $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, und außerdem $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

(i) Berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial z}z, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\bar z, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z}z, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z}\bar z.$$

(ii) Wann gilt für eine Funktion f (wie oben) die Gleichung $\frac{\partial}{\partial \bar z}f = 0$? Was ist in diesem Fall $\frac{\partial}{\partial z}f$?

(iii) Nur für den Fall, dass Ihnen im Reellen Differenzialformen geläufig sind: Wenn wir das Differenzialformenkalkül ganz naiv ins Komplexe ausdehnen, so dass beispielsweise $dz = d(x+iy) = dx + i\,dy$ gilt, wie drückt sich dann df in dz und $d\bar z$ aus?

Aufgabe 4.

(i) Auch wenn es in der Vorlesung schon in einem Satz angesprochen wurde: Zeigen Sie, dass eine auf einer offenen zusammenhängenden Menge definierte holomorphe Funktion durch ihren Realteil bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion, die außerdem (dies ist, wie wir bald lernen werden, kein echtes „außerdem“) reell zweimal stetig partiell differenzierbar ist, harmonisch sind. Das heißt, mit $f = u + iv$ gilt $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0$ und ebenso für v.

(iii) Geben Sie an, für welche $a,b\in\mathbb{R}$ das Polynom $x^2 + axy + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ ist und bestimmen Sie für jedes solche (a,b) alle diese holomorphen Funktionen.

Und noch ein Vorschlag für die Übung, wenn dort Zeit ist, vor allem für die Übungen, die vor der Abgabe stattfinden.

Tutoriumsaufgabe 1. Beweisen Sie die Produktregel für komplexe Differentiation und aus ihr, der Ableitung von $1/z$ und der Kettenregel die Quotientenregel.